

IN A U G U R A L D I S S E R T A T I O N

zur

Erlangung der Doktorwürde

einer

Hohen Naturwissenschaftlich-Mathematischen Fakultät

der

Ruprecht-Karl-Universität

zu

Heidelberg

vorgelegt von

Dipl. Phys. Ludwig Tauscher
aus Ulm/Donau

- 1966 -

Rechnungen über Magnetspektrometer für
ein Neutretto-Experiment und Messungen
am Mionen - Kanal des Synchrozyklotrons
des CERN

Referent: Priv.Doiz. Dr. H. Daniel
Korreferent: Prof. Dr. W. Gentner

Zusammenfassung

Für einen Sektorfeldmagneten mit drehbaren Polschuhkanten, der als Spektrometermagnet bei einem Vorexperiment zur Bestimmung der Ruhemasse des Neutrettos dienen soll, wurde eine Einstellung berechnet, die eine Impulsmessung mit einer Genauigkeit von $\Delta p/p \leq 10^{-3}$ ermöglicht. Der nutzbare Raumwinkel beträgt dabei 0,33 % von 4π . Die Messung der Koordinaten und Winkel der Teilchenbahnen mittels Funkenkammern ist notwendig.

Als Spektrometer für das Neutretto-Experiment wurde ein neuer Spektrometertyp, das Wendelspektrometer, entwickelt. Der Begriff des Wendelfeldes wurde eingeführt. Die Fokussierungseigenschaften von magnetischen Wendelfeldern mit konstanter azimuthaler Feldkomponente werden in einer Näherungsrechnung untersucht. Die Integration der Bewegungsgleichungen erfolgte in der ersten Näherung in geschlossener Form und in den höheren Näherungen numerisch.

Die erste Näherung ergab praktisch Doppelfokussierung in den beiden Öffnungswinkeln φ_r und φ_z . Die Abbildungsmaßstäbe sind in radialer und axialer Richtung -1 . In der zweiten Näherung wurde gezeigt, daß durch geeignete Wahl des Feldes die Abbildung in radialer Richtung unabhängig vom Quadrat des Öffnungswinkels φ_r und durch Vorgabe einer passenden Steigung der Wendel zusätzlich unabhängig vom Quadrat des Öffnungswinkels φ_z wird. Die Fokussierungseigenschaften von Wendelspektrometern wurden in zweiter Näherung mit denen korrespondierender Flachspektrometer verglichen.

Für ein Wendelfeld mit dem Fokussierungswinkel 909.72° wurde die Feldinhomogenität und die Steigung so vorgegeben, daß die Abbildung bis zur fünften Ordnung unabhängig von φ_r und bis zur zweiten Ordnung praktisch unabhängig von φ_z wurde. Exakte Rechnungen ergaben, daß mit diesem Feld bei Verwendung von sehr schmalen Quellen und von Schlitzen am Auffänger bei einem Raumwinkel von 0,229 % von 4π eine Auflösung von $\Delta p/p \leq 3 \cdot 10^{-5}$ erwartet werden kann. Bei Verwendung von Funkenkammern an Quelle und Auffänger, die eine Ortsauflösung von 0,5 mm und eine effektive Fläche von 100 cm^2 besitzen, kann über

die gesamte Fläche eine Auflösung von $\Delta p/p \leq 10^{-4}$ erreicht werden.
Der nutzbare Raumwinkel beträgt dabei 0,1 % von 4π .

In Vorbereitung eines Experimentes zur Messung der Röntgenstrahlung von π -mesonischen Atomen wurden die Strahlintensitäten am Mü-Kanal des Synchrozyklotrons des CERN untersucht. Einstellungen der Fokussierungselemente zur Erzielung optimaler Intensitäten wurden ermittelt.

Inhalt

Seite

I	EINLEITUNG.....	6
II	SEKTORFELDMAGNET.....	9
	1 Abbildungsgleichungen.....	9
	2 Randfeld.....	13
	3 Lichtstärke.....	15
	4 Auflösung.....	16
III	WENDELSPEKTROMETER.....	19
	1 Prinzip des Wendelspektrometers.....	19
	2 Das Wendelfeld.....	20
	3 Bewegungsgleichungen.....	24
	4 Erste Näherung.....	26
	5 Zweite Näherung.....	32
	6 Höhere Näherungen.....	35
	7 Genauigkeitsbetrachtungen.....	36
	8 Intensitätsverteilungen und Auflösung.....	37
	9 Charakteristische Daten des Wendelspektrometers.....	43
	10 Konstruktionsvorschlag.....	44
	Diskussion.....	46
	ANHANG.....	50
	Mathematischer Anhang.....	50
	Experimenteller Anhang.....	52
	Literatur.....	55
	Tabellen und Zeichnungen.....	56

I EINLEITUNG

Zur genauen Bestimmung der Ruhemasse des mit dem Müon gekoppelt auftretenden Neutrinos ist von Daniel und Poelz)¹ ein Experiment vorgeschlagen worden, das beim CERN durchgeführt werden soll und aus einer Reihe möglicher Messmethoden)² diejenige des Zerfalls des Pions in Ruhe und die Spektroskopie der dabei entstehenden Müonen und Elektronen mit einem Magnetspektrometer vorsieht. Da die Müonen bzw. Elektronen beim Durchqueren des Targets, in dem sie entstehen, einen Energieverlust bekannter Größe erleiden, wird der ursprünglich scharfe Impuls aus dem Zweikörperzerfall zu einem Impulsband ausgezogen. Deshalb muß, will man nicht eine erhebliche Einbuße an Intensität in Kauf nehmen, das gesamte Impulsband gleichzeitig gemessen, d.h. spektrographiert werden muß.

Aus Intensitätsgründen muß außerdem das Target, in dem die Pionen zur Ruhe kommen, großflächig gemacht werden, da die Pionen aus dem Synchrozyklotron vom CERN bestenfalls auf eine Kreisfläche eines Durchmessers von 5 cm fokussiert werden können. Diese beiden Forderungen machen die Verwendung von Funkenkammern an Quelle und Auffänger notwendig.

Für die Spektroskopie höherenergetischer Teilchen sind in letzter Zeit Anordnungen in Anwendung gekommen, bei denen lediglich eine Fokussierung erster Ordnung)³ benutzt, bzw. auf eine Fokussierung durch das Magnetfeld überhaupt verzichtet wird)⁴. Stattdessen werden die Teilchenbahnen durch Messung der Anfangs- und Endkoordinaten mittels jeweils einer Funkenkammer und durch Messung der Winkel zur Sollbahn mittels einer weiteren Funkenkammer unter Benützung der genauen Kenntnis des Magnetfeldes numerisch berechnet. Die erste Methode hat den Vorteil kleinerer Detektorfunkenkammern. Für hochenergetische Teilchen hängt die Genauigkeit dieses Verfahrens nur von der Genauigkeit der Funkenkammern und des Feldes ab. Bei langsameren Teilchen gewinnt die Richtungsstreuung in der zuerst durchlaufenen Detektorfunkenkammer an Einfluß, so daß die Winkelmessung mit einem erheblichen Fehler behaftet wird. Eine der ersten entsprechende Methode soll für ein vorläufiges Experiment zur Anwendung kommen, bei dem eine Auflösung von $\frac{\Delta p}{p} = 10^{-2}$ erwar-

tet wird. Bei Fokussierung der Teilchenbahnen durch das Spektrometerfeld erübrigt sich die zur Bestimmung der Winkel nötige dritte Funkenkammer.

Die Verwendung einer in radialer und axialer Richtung ausgedehnten Quelle hat zur Folge, daß bei der Abbildung durch das Spektrometerfeld alle Abbildungsfehler, die von den Anfangskoordinaten abhängen, groß werden. Überdies entstehen durch die Verwendung von Funkenkammern Fehler, die von der beschränkten Ortsauflösung herrühren. Aus solchen Gründen muß das in Frage kommende Spektrometer eine hohe Dispersion aufweisen, um eine gute Auflösung zu erhalten.

Die in der Beta-Spektroskopie mit Flachspektrometern gebräuchlichen Fokussierungsprinzipien der Doppelfokussierung, etwa des $\pi\sqrt{2}$ - Spektrometers, oder neuerdings der radialen Fokussierung bei gleichzeitiger axialer Defokussierung wie bei dem $\pi\sqrt{3}/2$ - Spektrometer ^{5,6} liefern Dispersionen von 4,0 bzw. 6,5. Die Dispersion ist dabei definiert als $D = (dr/r)/(dp/p)$, wobei r die Radialkoordinate und p der Impuls der Teilchen ist. Um höhere Dispersion zu erhalten, wurde der Begriff des doppelfokussierenden Flachspektrometers ausgedehnt auf Flachspektrometer mit Fokussierungswinkeln von mehr als 2π ^{5,7,8}. Wegen der Abhängigkeit der Dispersion vom Fokussierungswinkel ^{5,9} erhält man so bei einem Fokussierungswinkel von 569° eine Dispersion von 20 und bei einem solchen von 918° sogar eine Dispersion von 52. Für das Fokussierungsprinzip der radialen Fokussierung bei gleichzeitiger axialer Defokussierung ist die Abhängigkeit der Dispersion vom Fokussierungswinkel dieselbe, indessen erscheint dieses Prinzip für Spektrometer der in dieser Arbeit geforderten Eigenschaften nicht geeignet, da die Detektor-Funkenkammer sehr hoch sein müßte.

Die Realisierung von doppelfokussierenden Flachspektrometern mit Mehrfachumlauf ist allerdings schwierig, da neben den bereits fokussierten Teilchen auch solche Teilchen am Auffänger ankommen, die erst einen Bruchteil des Fokussierungswinkels durchlaufen haben. Eine rechnerische Abschätzung des hierdurch entstehenden Untergrundes ist von Lee-Whiting ⁷ angegeben worden. Anordnungen, bei denen Quelle und Auffänger radial versetzt sind, erfordern eine Reduzierung der Lichtstärke ^{5,8}. Für die Spektrographie sind Flachspektrometer ho-

her Dispersion mit Mehrfachumlauf prinzipiell ungeeignet; denn die gleichzeitige Registrierung eines Impulsbandes erfordert Auf- fänger großer radialer Ausdehnung, so daß die Lichtstärke sehr ge- ring wird.

In dieser Arbeit wird deshalb ein neuer Spektrometertyp, das Wendel- spektrometer, eingeführt. Dieses Spektrometer erlaubt Mehrfachumlauf und damit hohe Dispersion bei voller Ausnützung des Raumes zwischen den Polschuhen.

Zu Studien über Quellen- und Detektoranordnung und die damit verbun- dene Elektronik sowie über Intensitätsfragen beim Neutrettoexperi- ment)¹ wird ein Experiment vorbereitet, im Rahmen dessen ein beim CERN unter der Typenbezeichnung MC vorhandener Monochromatormagnet als Spektrometermagnet benützt werden soll. Dieser Magnet besitzt Eisenpolschuhe mit drehbaren Polschuhkanten, so daß in gewissen Gren- zen das Randfeld variiert und damit die Fokussierung geregelt werden kann. In dieser Arbeit soll eine Einstellung des Magneten errechnet werden, die ihn als Spektrometer für dieses Experiment geeignet macht. Außerdem soll eine Abschätzung der erwarteten Auflösung gege- ben werden, anhand derer die Dimensionierung von Quelle und Detektor errechnet werden kann.

II SEKTORFELDMAGNET

Für das Vorexperiment zur Bestimmung der Neutrettomasse ist die in Figur 1 gezeigte Anordnung geplant. Die Pionen werden in einem Absorber abgebremst und kommen in dem aus verschiedenen dünnen Szintillatorfolien bestehenden Target zur Ruhe. Um eine Ortsmessung vornehmen zu können, wird zwischen das Target und den Absorber eine Funkenkammer oder eine Anordnung von parallelen Szintillationsstreifen eingefügt. Die im Target entstehenden Müonen bzw. Elektronen durchqueren ein homogenes Magnetfeld und werden danach mittels zweier Funkenkammern registriert. Die Verwendung von zwei Funkenkammern erlaubt eine Messung der Koordinaten und der Winkel und ermöglicht deshalb unter Voraussetzung der genauen Kenntnis des Feldes die numerische Berechnung der Teilchenbahnen und damit eine von den ionenoptischen Eigenschaften des Magnetfeldes ziemlich unabhängige Spektroskopie, sofern eine gewisse Genauigkeit nicht überschritten werden soll.

Der in Anwendung kommende Sektorfeldmagnet ist ein beim CERN unter der Typenbezeichnung MC vorhandener Monochromatormagnet mit planparallelen Eisenpolschuhen und drehbaren Polschuhkanten. Die Einstellung des Magneten hat so zu erfolgen, daß die Forderung nach größtmöglicher Transmission und hoher Dispersion erfüllt wird, und gleichzeitig die Dimensionen von Quelle und Auffänger realisierbar bleiben.

1 Abbildungsgleichungen

Die Forderung nach hoher Dispersion legt eine Ablenkung um 90° nahe. Zur Berechnung der ionenoptischen Eigenschaften eines Sektorfeldes ist bei der oben angedeuteten Messmethode eine erste Näherung ausreichend und durch die Formeln von Herzog ¹⁰ und Hintenberger ¹¹ gegeben. Es gelten folgende in Figur 2 und 3 erläuterten Definitionen für die Abbildung von achsennahen Strahlen in radialer Richtung:

f

gegenstands- bzw. bildseitige Brennweite,

g_1, g_2

Abstand der Brennpunkte von den zugehörigen Polschuhkanten,

h_1, h_2	Abstand der Hauptebenen von den zugehörigen Polschuhkanten,
l_1	Abstand des Gegenstandes von der Polschuh-eintrittskante,
l_2	Abstand des Bildes von der Polschuhaustritts-kante,
ε_1	Winkel zwischen einfallendem Normalstrahl und der Normalen der Polschuh-eintrittskante,
ε_2	Winkel zwischen austretendem Normalstrahl und der Normalen der Polschuhaustrittskante,
D	Dispersion,
β_r, β_v	Abbildungsmaßstab in radialer bzw. axialer Richtung.

$F, G_1, G_2, L_1, L_2, H_1, H_2$ entsprechende Größen für die Fokussierung in axialer Richtung.

Die Abbildungsgleichungen sind diejenigen einer dicken Linse und lauten:

$$\begin{aligned} \frac{1}{f} &= \frac{1}{l_1 - h_1} + \frac{1}{l_2 - h_2}, \\ g_1^2 &= (l_1 - g_1)(l_2 - g_2), \\ f &= g_1 - h_1 = g_2 - h_2. \end{aligned} \quad (1)$$

Nach Herzog ¹⁰ gilt

$$\begin{aligned} f &= 1/(1 - \operatorname{tg} \varepsilon_1 \operatorname{tg} \varepsilon_2), \\ g_1 &= \operatorname{tg} \varepsilon_2 \cdot f, \\ g_2 &= \operatorname{tg} \varepsilon_1 \cdot f, \\ D &= 1 + l_2 (1 + \operatorname{tg} \varepsilon_2), \\ \beta_r &= \operatorname{tg} \varepsilon_1 - l_2 (1 - \operatorname{tg} \varepsilon_1 \operatorname{tg} \varepsilon_2), \end{aligned} \quad (2a)$$

und nach Cotte ¹²

$$\begin{aligned} F &= 1/(\operatorname{tg} \varepsilon_1 + \operatorname{tg} \varepsilon_2 - \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varepsilon_1 \operatorname{tg} \varepsilon_2), \\ G_1 &= F(1 - \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varepsilon_2), \\ G_2 &= F(1 - \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varepsilon_1). \end{aligned} \quad (2b)$$

Eine Möglichkeit der Bahnberechnung in einer ersten Näherung bieten folgende der Arbeit ¹³ entnommene Gleichungen:

$$\begin{pmatrix} x \\ \phi_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{tg} \varepsilon_1 & 1 \\ -(1 - \operatorname{tg} \varepsilon_1 \operatorname{tg} \varepsilon_2) & \operatorname{tg} \varepsilon_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \phi_r \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} y \\ \phi_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varepsilon_1 & \pi/2 \\ -(\operatorname{tg} \varepsilon_1 + \operatorname{tg} \varepsilon_2) & 1 - \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varepsilon_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ \phi_r \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Es sind die folgenden Definitionen benützt:

x	Abweichung von der Sollbahn in der radialen Richtung (Mittlebene);
y	Abweichung von der Sollbahn in der dazu senkrechten Richtung;
ϕ_r	Winkel zwischen der auf die Mittlebene projizierten Bahn und der Sollbahn;
ϕ_z	Winkel zwischen der auf die zur Mittlebene senkrechten und die Sollbahn enthaltenden Ebene projizierten Bahn und der Sollbahn;
x_0, y_0, ϕ_r, ϕ_z	Anfangswerte.

Für die Änderung des Winkels ϕ_z an einer Polschuhkante gilt:

$$\Delta \phi_z = -y_0 \operatorname{tg} \varepsilon_v, \quad v = 1, 2. \quad (4)$$

Eine von jeder Potenz von ϕ_r unabhängige Fokussierung in der Mittlebene ist nach Hintenberger ¹¹ möglich, wenn die Polschuhkanten gewisse Kurven sind. Fokussierung erster Ordnung erhält man, wenn die Polschuhkanten Tangenten an diese Kurven sind. Fokussierung zweiter Ordnung unabhängig von ϕ_r ergibt sich, wenn die Polschuhkanten Kreislinien vom Radius des Krümmungsradius an diese Kurven sind. Da im vorliegenden Falle nur geradlinige Polschuhkanten zur Verfügung stehen, kommt für eine von ϕ_r^2 unabhängige Fokussierung nur diejenige Einstellung in Frage, in der die Kurven einen Wendepunkt besitzen, da hier der Krümmungsradius unendlich ist. Diese Bedingung liefert bei einer Gesamtablenkung von 90° :

$$l_1 l_2 = 4/9,$$

bzw.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varepsilon_1 &= -\frac{3}{4} l_2, \\ \operatorname{tg} \varepsilon_2 &= -\frac{1}{3} \frac{1}{l_2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Später wird sich zeigen, daß eine solche Fokussierung unverträglich ist mit gleichzeitiger axialer Fokussierung.

Mit diesen Formeln läßt sich die für das Vorexperiment günstigste Einstellung des Magneten berechnen. Der Forderung entsprechend, daß die Funkenkammern nicht zu groß gemacht werden sollen, wird der radiale Abbildungsmaßstab

$$\gamma_r = -1$$

gesetzt. Diese Bedingung hat zur Folge, daß gemäß (2) folgt:

$$l_2 = (1 + \operatorname{tg} \varepsilon_1) / (1 - \operatorname{tg} \varepsilon_1 \operatorname{tg} \varepsilon_2) \quad (6a)$$

und entsprechend

$$l_1 = (1 + \operatorname{tg} \varepsilon_2) / (1 - \operatorname{tg} \varepsilon_1 \operatorname{tg} \varepsilon_2). \quad (6b)$$

Für die Abbildung in vertikaler Richtung gilt

$$L_1 = l_1$$

und somit wegen

$$L_1 = F(1 - \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varepsilon_2 - 1/\gamma_r)$$

$$\text{und } L_2 = F(1 - \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varepsilon_1 - \gamma_r) \quad (7)$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon_1 = \frac{1 - (1/\gamma_r + \operatorname{tg} \varepsilon_2 (1 + \pi/2) + \operatorname{tg}^2 \varepsilon_2)}{1 + \operatorname{tg} \varepsilon_2 (2 - \pi/2 - 1/\gamma_r) + \pi \operatorname{tg}^2 \varepsilon_2}.$$

Weiterhin soll nun zur Vermeidung eines Aberrationsfehlers in dem vertikalen Öffnungswinkel γ_z der Strahlverlauf für Teilchen, die in der Mittelebene starten, planparallel zur Mittelebene sein.

Dies bedeutet nach (5)

$$-\gamma_0 \operatorname{tg} \varepsilon_1 = -\gamma_z,$$

und wegen

$$\gamma_z = \gamma_0 / l_1$$

folgt daraus

$$l_1 = 1 / \operatorname{tg} \varepsilon_1. \quad (8)$$

Setzt man diese Beziehung in (6b) ein, so erhält man

$$\operatorname{tg} \varepsilon_2 = (l_1 - 1) / 2 \quad (9)$$

und hiermit aus (6a)

$$l_2 = 2. \quad (10)$$

Wegen (7) ist die Abhängigkeit des Winkels ε_1 von γ_v gegeben durch

$$\operatorname{tg} \varepsilon_1 = \frac{\gamma_v}{4} \left(1 - \sqrt{1 + 8/\gamma_v} \right).$$

Tabelle 1a gibt den Zusammenhang der für die Fokussierung wichtigen Größen für $\gamma_r = -1$ und $l_2 = 2$.

Eine Fokussierung in φ_r^2 ist unter den oben verwendeten Bedingungen nicht möglich, da nach Gl.(8) immer $\operatorname{tg} \varepsilon_1 > 0$ ist, was im Widerspruch steht zu (5). Außerdem erhält man mit (5) aus (2b) immer

$$F < 0,$$

was gleichbedeutend ist mit einer axialen Defokussierung.

2 Randfeld

Bei den Betrachtungen des vorigen Abschnitts ist als Polschuhkante immer die effektive Polschuhkante gemeint, d.h. eine fiktive Stufe, an der das Feld von einer konstanten Größe H_0 auf Null absinkt. Die Lage dieser Stufe ist dadurch definiert, daß ein Teilchen nach Durchlaufen eines homogenen Feldes H_0 zwischen den effektiven Polschuhkanten genau dieselbe Ablenkung erfährt wie nach Durchlaufen des realen Feldes.

Die effektive Polschuhkante liege um die Größe δ vor der realen Polschuhkante. Die vertikale Komponente H_z des Randfeldes erstreckt sich über den Bereich $[-x_0, \infty)$, wobei die x-Achse des zugrunde gelegten Koordinatensystems senkrecht zur Polschuhkante verläuft und die y-Achse mit der realen Polschuhkante zusammenfällt (vgl. Figur 3).

Im folgenden soll der Abstand δ der effektiven Polschuhkante von der realen unter Voraussetzung der Kenntnis des Randfeldes näherungsweise berechnet werden.

Die Lorentzkraft liefert die Bewegungsgleichungen für Teilchen in der Mittelebene, deren Ladung e , deren Masse m und deren Geschwindigkeit v ist

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\dot{y} \frac{e}{m} H_z(x), \\ \ddot{y} &= \dot{x} \frac{e}{m} H_z(x).\end{aligned}\tag{11}$$

Jeder Punkt kennzeichnet eine Ableitung nach der Zeit t .

Mit $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$ und wegen

$$\frac{d}{dt} = \dot{x} \frac{d}{dx}$$

folgt aus (11)

$$\frac{d}{dx} y'(x) = \frac{1}{v} \frac{e}{m} H_z(x) \sqrt{1 + y'^2}.$$

In zweiter Näherung ist für kleine y' , d.h. für kleine Winkel zur Sollbahn,

$$\frac{d}{dx} y'(x) = \frac{1}{v} \frac{e}{m} H_z(x) (1 + \frac{1}{2} y'^2).\tag{12}$$

Dies ist eine Differentialgleichung vom Abelschen Typ, und ihre Lösung hat für $x \rightarrow \infty$ die Form)¹⁴

$$y' = -\sqrt{2} \operatorname{tg} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\infty \frac{1}{v} \frac{e}{m} H_z(x) dx \right\}.\tag{13}$$

Für die Festlegung der effektiven Polschuhkante ist im Bereich $[-x_0, \delta]$ die Feldstärke $H_z \equiv H_0$ und die Lösung von (12) im Punkte $x = \delta$ also

$$y' = -\sqrt{2} \operatorname{tg} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{v} (\delta + x_0) \frac{e}{m} H_0 \right\}.\tag{14}$$

(13) und (14) müssen nach Definition der effektiven Polschuhkante gleich sein, woraus unmittelbar folgt

$$\delta = \frac{1}{H_0} \int_0^\infty H_z(x) dx - x_0.\tag{15}$$

Für den Monochromatormagneten des CERN beträgt $\delta = 7,55$ cm. Dies entspricht bei einer Einstellung der Polschuhkanten für $\varphi_0 = -4$ einem Sollkreisradius von $R = 58$ cm.

3 Lichtstärke

Bei flächenförmiger Quelle hängt der transmittierende Raumwinkel aus einem Punkt der Quelle von dessen Koordinaten ab. In diesem Abschnitt wird eine Berechnung erster Näherung der Abhängigkeit des Raumwinkels von der z-Koordinate der Quelle vorgenommen. Der Einfluß der horizontalen Ausdehnung der Quelle kann vernachlässigt werden, da die Breite der Polschuhe groß ist im Vergleich zu ihrem Abstand.

Gl. (3) liefert den Zusammenhang zwischen dem axialen Öffnungswinkel φ_z bzw. der axialen Koordinate der Quelle und dem Öffnungswinkel ϕ_z am Auffänger:

$$\phi_z = z_0 (tg \varepsilon_1 + tg \varepsilon_2) - tg \varepsilon_2 (1/tg \varepsilon_1 + \pi/2) \varphi_z .$$

Die Grenzen von φ_z sind durch die Geometrie der Vakuumkammer gegeben (Figur 4). Die Abhängigkeit des gesamten axialen Öffnungswinkels $\Delta \varphi_z$ von der Axialkoordinate der Quelle bei verschiedenem γ_v ist in Figur 5 gezeigt.

Die Lichtstärke ist eine Funktion der Quellenfläche und des nutzbaren Raumwinkels $\Omega(r, z)$ an jedem Punkt der Quelle:

$$L = \frac{1}{4\pi} \int_F \Omega(r, z) dr dz ,$$

wo r die horizontale Koordinate und F die gesamte Quellenfläche bedeutet. Unter der Annahme, daß $\Omega(r, z)$ unabhängig von r ist, wird die Lichtstärke in erster Näherung

$$L = r_0 \frac{\Delta \varphi_r}{\pi} \int_0^{z_0} \Delta \varphi_z(z) dz ,$$

wenn $\Delta \varphi_r$ der gesamte von z unabhängige Öffnungswinkel, r_0 die halbe Quellenbreite und z_0 die halbe Quellenhöhe ist. Die Lichtstärken für verschiedene γ_v für die Quellenbreite $2r_0 = 0,1$ und für die Quellenhöhe $2z_0 = 0,09$ in Einheiten des Sollkreisradius sind in der Tabelle 1b angegeben. Die für diese Tabelle nötige Kenntnis der Grenzen des radialen Öffnungswinkels φ_r ist zeichnerisch gewonnen. Aus der Tabelle ist ersichtlich, daß die Lichtstärke mit der axialen Vergrößerung zunimmt. Allerdings vergrößern sich damit auch die Winkel ϕ_z auf der Bildseite, d.h. die Divergenz des Strahles wird mit zunehmendem γ_v

größer. Hier ist also ein Kompromiß zwischen größtmöglicher Lichtstärke und realisierbarer Größe der Detektorfunkenkammern zu schließen.

Für das Vorexperiment wird eine axiale Vergrößerung $\gamma_v = -4$ gewählt. Bei einer Quellenhöhe von insgesamt 10 cm hat dies eine Höhe der Funkenkammern von 19 cm für die erste bzw. 22 cm für die zweite zur Folge. Die erste Funkenkammer hat dabei von der effektiven Polschuhaustrittskante einen Abstand von l_1 . Der Abstand der beiden Funkenkammern von einander beträgt 30 cm.

4 Auflösung

Um die Auflösung der Sektorfeldanordnung angeben zu können, müßte der Bahnverlauf der Teilchen bekannt sein. Da die Bahngleichungen unbekannt sind, soll eine Abschätzung der Auflösung vorgenommen werden. Hierzu wird die inverse Abbildung betrachtet, also die Abbildung der Punkte der Detektorfunkenkammer auf die Quelle. Dabei ändert sich wegen der Asymmetrie der Anordnung ($l_1 \neq l_2$) die Dispersion. Für $\gamma_v = -4$ ist die Dispersion

$$D_{inv} = 3,37.$$

Die Bildkoordinate g in radialer Richtung läßt sich nach den Anfangskoordinaten g_0, ζ_0 und den Öffnungswinkeln ϕ_r und ϕ_z entwickeln, wobei die Koeffizienten dieser Entwicklung die Abbildungsfehler der inversen Abbildung sind. Diese Entwicklung lautet bis zur dritten Ordnung:

$$g = \sum_{\nu=0}^4 \sum_{\mu=\nu}^4 \sum_{\kappa=\mu}^4 A_{\nu\mu\kappa} \xi_\nu \xi_\mu \xi_\kappa,$$

$$\begin{aligned} \xi_0 &= 1, \\ \xi_1 &= \phi_r, \\ \xi_2 &= \phi_z, \\ \xi_3 &= g_0, \\ \xi_4 &= \zeta_0, \\ A_{000} &= 0. \end{aligned}$$

(16)

Variation von φ ergibt

$$d\varphi = \sum_{\substack{\nu=\mu \\ \mu=\nu}}^4 A_{\nu\mu\kappa} \left\{ \xi_\mu \xi_\kappa d\xi_\nu + \xi_\nu \xi_\kappa d\xi_\mu + \xi_\nu \xi_\mu d\xi_\kappa \right\}. \quad (17)$$

Durch die Abbildungsfehler wird eine Verteilung in φ erzeugt, deren obere Grenze der Varianz σ_φ^2 sich unter Benutzung der sich durch die Messung der $\xi_\nu (\nu = 1, 2, 3, 4)$ ergebenden Varianzen $\sigma^2 \xi_\nu$ und nach Einsetzen der Streuungen $\{\xi_\nu\}$ durch Addition der Quadrate der Summanden aus (17) berechnen. Hierbei sind die Koeffizienten $A_{003} = -1$ und A_{011} bzw. A_{111} zeichnerisch zu $A_{011} = 3,5$ und $A_{111} = 6,3$ bestimmt. Die übrigen Aberrationsterme sind bis auf diejenigen, die aus Symmetriegründen verschwinden, pauschal gleich 5 gesetzt worden. Die Streuungen der Anfangswerte sind unter Zugrundelegung einer Rechteckverteilung

$$\begin{aligned} \{\phi_r\} &= 0,135, \\ \{\phi_z\} &= 0,031, \\ \{\varphi_0\} &= 0,070, \\ \{\xi_0\} &= 0,093. \end{aligned}$$

Damit wird die Varianz der durch die Abbildungsfehler hervorgerufenen Verteilung in φ :

$$\sigma_{\varphi_{Abb}}^2 = 5,71 \sigma^2 \phi_r + 0,83 \sigma^2 \phi_z + 7,13 \sigma^2 \varphi_0 + 4,55 \sigma^2 \xi_0. \quad (18)$$

Da die Winkel ϕ_r bzw. ϕ_z mittels zweier im Abstand d voneinander aufgestellter Funkenkammern gemessen werden, ist

$$\sigma^2 \phi_r = 2 \sigma^2 \varphi_0 / d^2$$

$$\text{bzw. } \sigma^2 \phi_z = 2 \sigma^2 \xi_0 / d^2.$$

Setzt man dies in (18) ein und berücksichtigt, daß $d = 0,517$ in Einheiten des Sollkreisradius ist, so erhält man

$$\sigma_{\varphi_{Abb}}^2 = 49,7 \sigma^2 \varphi_0 + 10,7 \sigma^2 \xi_0, \quad (19)$$

wo $\sigma^2 \varphi_0$ bzw. $\sigma^2 \xi_0$ die Varianzen der aus der Messung der Koordinaten φ_0, ξ_0 mittels der Funkenkammern resultierenden Verteilungen sind.

Instabilitäten des Magnetfeldes wirken sich ebenfalls auf die Bildkoordinate φ aus, indem sie eine Verteilung hervorrufen, deren Varianz

$$\sigma_{\varphi_{Feld}}^2 = \sigma^2 \frac{\Delta H}{H} \cdot D_{inv}^2 \quad (20)$$

ist, wo $\sigma \frac{\Delta H}{H}$ die Streuung der Magnetfeldschwankungen darstellt.

Stragglingprozesse und der Energieverlust in der Folie, in der die Müonen bzw. Elektronen entstehen, sowie die Methode der Ortsmessung im Target verbunden mit der Richtungsstreuung der Pionen liefern eine Verteilung in ϑ , deren Varianz pauschal mit $\sigma^2 \vartheta_{\text{Target}}$ bezeichnet werde.

Die Varianz der aus Abbildungsfehlern, Magnetfeldschwankungen und Targetprozessen resultierenden Gesamtverteilung ist die Summe der Einzelvarianzen, also

$$\sigma^2 \vartheta_{\text{gesamt}} = \sigma^2 \vartheta_{\text{Abb}} + \sigma^2 \vartheta_{\text{feld}} + \sigma^2 \vartheta_{\text{Target}} \quad . \quad (21)$$

Die für die Gewünschte Genauigkeit der Impulsmessung nötige Halbwertbreite der zu messenden Impulsverteilung soll wegen der Unkenntnis dieser Verteilung gleich der doppelten Streuung dieser Verteilung gesetzt werden. Sei $\sigma \frac{\Delta p}{p}$ diese Streuung, dann ist die Varianz der korrelierten ϑ -Verteilung

$$\sigma^2 \vartheta_{\Delta p/p} = \sigma^2 \frac{\Delta p}{p} \cdot D_{\text{inv}}^2 \quad .$$

Diese Varianz muß gleich der Varianz der Gesamtverteilung (21) sein. Die Auflösung des Systems ist dann

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{2}{D_{\text{inv}}} \sqrt{\sigma^2 \vartheta_{\text{gesamt}}} \quad .$$

Beträgt die Genauigkeit der Ortsbestimmung der Funkenkammern ± 1 mm, die Streuung also

$$\sigma \vartheta_0 = \sigma \xi_0 = 1,75 \cdot 10^{-3}$$

in Einheiten des Sollkreisradius, nimmt man weiterhin für das Magnetfeld eine Stabilität von $\pm 10^{-3}$ an, also

$$\sigma \frac{\Delta H}{H} = 10^{-3}$$

und rechnet schließlich mit einer aus dem Target herrührenden realistischen Streuung ¹⁵ von

$$\sigma \vartheta_{\text{Target}} = 1,35 \cdot 10^{-2} \quad ,$$

so ist die Streuung von $\Delta p/p$

$$\sigma \frac{\Delta p}{p} = 4,61 \cdot 10^{-3} \quad .$$

Dies bedeutet eine Auflösung von

$$\Delta p/p = 9,22 \cdot 10^{-3}.$$

Bei guter Statistik ist die Bestimmung des Maximums der $\Delta p/p$ -Verteilung um eine Größenordnung genauer, so daß der Impuls mit einer Genauigkeit von zumindest

$$\Delta p/p \leq 10^{-3}$$

bestimmt werden kann.

III WENDELSPEKTROMETER

Für die endgültige Versuchsanordnung ist ein Spektrometer vorgesehen, das eine wesentlich größere Dispersion als die bisher bekannten Flachspektrometer besitzen und dessen Magnetfeld gleichzeitig eine optimale Fokussierung erlauben soll. Diese Bedingungen erfordern die Entwicklung eines neuen Spektrometertyps, des Wendelspektrometers.

1 Prinzip des Wendelspektrometers

Bevor das Prinzip des Wendelspektrometers erläutert wird, sollen kurz die Begriffe der Wendel und der Wendelfläche erklärt werden.

Eine Wendelfläche ist definiert als Fläche, die dadurch entsteht, daß eine Gerade, die etwa die z-Achse eines Zylinderkoordinatensystems senkrecht schneidet, mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um diese Achse rotiert und sich gleichzeitig mit konstanter Geschwindigkeit entlang dieser Achse bewegt. Eine Wendel ist die Schnittkurve einer Wendelfläche mit einem zu ihr coaxialen Zylinder)¹⁶.

Das Wendelfeld wird definiert als ein Magnetfeld, das orthogonal zu einer Wendelfläche ist. Ein elektrisch geladenes Teilchen, das tangential zu einer Wendel eingeschossen wird, die in der das Wendelfeld definierenden Wendelfläche liegt, durchläuft genau diese Wendel,

sofern es nur den richtigen Impuls hat. Dies läßt sich anhand der Bewegungsgleichungen für elektrisch geladene Teilchen im Magnetfeld nachweisen.

Es ist nicht schwer festzustellen, daß jede Normale einer Wendelfläche eine Wendel ist. Da die Tangente an eine Wendel sich in eine axiale und in eine azimuthale Komponente zerlegen läßt, kann ein Wendelfeld durch Superposition eines axialen Feldes, etwa des Feldes einer Zylinderspule, und eines azimuthalen Feldes, etwa desjenigen eines Drahtes in der Achse der Spule, hergestellt werden. Die Maxwellgleichungen bestätigen diese Konstruktion. Das Wendelspektrometer ist damit ein Spektrometer, dessen Sollbahn eine Wendel ist, dessen Symmetrieffläche mit der dazugehörigen Wendelfläche zusammenfällt und dessen Magnetfeld in nullter Näherung oder in der Sollbahn genau mit dem durch die Symmetrieffläche bestimmten Wendelfeld übereinstimmt.

2 Das Wendelfeld

In diesem und allen weiteren Abschnitten werden folgende Bezeichnungen benutzt:

r, ϑ, z	Zylinderkoordinaten,
h	Steighöhe der Wendel bei einem Umlauf,
r_0	Radius der Sollbahn,
$\alpha = h/2\pi$	Anstieg der Wendelfläche,
$k = \alpha/r_0 = \tan \theta$	Steigung der Sollbahn,
ω_0	Winkelgeschwindigkeit des Sollteilchens,
ϑ, ϕ, ξ	auf die Sollbahn reduzierte Zylinderkoordinaten, $\vartheta = (r - r_0)/r_0$, $\phi = \vartheta - \omega_0 t$, $\xi = z/r_0 - k\omega_0 t$,
H_r, H_ϑ, H_z	Magnetfeldkomponenten bezüglich der Zylindervektorbasis,
φ	skalares magnetisches Potential.

Ein Teilchen mit dem Sollimpuls p_0 durchläuft, wenn es tangential

zu einer Wendel, die in der das Wendelfeld definierenden Wendelfläche liegt, eingeschossen wird, genau diese Wendel. Im Sollfeld hat diese Wendel den Radius τ_0 und heißt Sollbahn. Die Wendelfläche, die die Sollbahn enthält, ist die Sollfläche. Die Sollbahn hat die Koordinaten

$$\begin{aligned}\tau &= \tau_0, \\ \phi &= \omega_0 t, \\ z &= k \tau_0 \omega_0 t.\end{aligned}$$

Figur 6 erläutert die Geometrie.

Für Spektrometer brauchbare Felder sind aus dem im vorigen Abschnitt definierten Wendelfeld nullter Näherung durch geeignete Modifikation erhältlich. Das Feld ist seiner Konstruktion gemäß in nullter Näherung orthogonal zu der Schar der Wendelflächen mit dem Anstieg α . Für das endgültige Feld sollen gewisse Symmetrien postuliert werden:

- a) Das Feld enthält keine Azimutabhängigkeit außer der durch den Wendelcharakter bedingten, d.h. jede Wendel mit dem Anstieg α ist Äquipotentiallinie des skalaren magnetischen Potentials.
- b) Die Sollfläche ist Symmetrieffläche, d.h. das Potential jeder Wendel, die um $+z_0$ gegenüber der Sollfläche verschoben ist, ist das Negative des Potentials derjenigen Wendel, die um $-z_0$ gegenüber der Sollfläche verschoben ist. Die Sollfläche hat das Potential Null.

Eine Wendel läßt sich in reduzierten Koordinaten darstellen durch

$$\varrho = \text{const.}, \quad \xi - k\phi = \text{const.}$$

Das erste Postulat hat demnach zur Folge, daß sich das skalare magnetische Potential schreiben läßt als

$$\varphi(\varrho, \phi, \xi) = \varphi(\varrho, \xi - k\phi).$$

Das Zweite Postulat besagt, daß das magnetische Potential antisymmetrisch ist bezüglich $\xi - k\phi$, also

$$\varphi(\varrho, \xi - k\phi) = -\varphi(\varrho, -(\xi - k\phi)).$$

Dies führt zu der folgenden Potenzreihenentwicklung für das skalare magnetische Potential:

$$\varphi(\varrho, \phi, \xi) = \sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} \alpha_{\mu}^{2\nu+1} \varrho^{\mu} (\xi - k\phi)^{2\nu+1}. \quad (1)$$

Die Feldkomponenten erhält man hieraus durch Gradientenbildung. Setzt man

$$\begin{aligned} c_{2\nu+1} &= \sum_{\mu=0}^{\infty} (\mu+1) \alpha_{\mu+1}^{2\nu+1} \varrho^{\mu}, \quad \nu = 0 - \infty, \\ c_{2\nu} &= (2\nu+1) \sum_{\mu=0}^{\infty} \alpha_{\mu}^{2\nu+1} \varrho^{\mu}, \quad \nu = 0 - \infty, \\ \alpha_{\mu} &= \alpha_{\mu}^1, \quad \mu = 0 - \infty, \end{aligned} \quad (2)$$

so erhalten die Feldkomponenten die Form:

$$\begin{aligned} H_r &= H_0 \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{2\nu+1} (\xi - k\phi)^{2\nu+1}, \\ H_z &= H_0 \left\{ \sum_{\mu=0}^{\infty} \alpha_{\mu} \varrho^{\mu} + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_{2\nu} (\xi - k\phi)^{2\nu} \right\}, \\ H_{\phi} &= - \frac{k}{1+\varrho} H_z, \quad \alpha_0 = 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Die Maxwellgleichungen liefern Rekursionsformeln zur Bestimmung der Koeffizienten c_{ν} :

$$\begin{aligned} (2\nu+1) c_{2\nu+1} &= \partial c_{2\nu} / \partial \varrho, \quad \nu \geq 1, \\ 2\nu c_{2\nu} &= - \frac{1+\varrho}{k^2 + (1+\varrho)^2} \{ c_{2\nu-1} + (1+\varrho) \partial c_{2\nu-1} / \partial \varrho \}, \quad \nu \geq 1, \\ c_1 &= \sum_{\mu=1}^{\infty} \mu \alpha_{\mu} \varrho^{\mu-1}. \end{aligned} \quad (4)$$

Diese Rekursionsformeln liefern nach Vorgabe der Entwicklungskoeffizienten α_{μ} ($\mu \geq 1$) der z-Komponente des Feldes in der Symmetrieffläche alle für die allgemeine Entwicklung des Feldes nötigen Entwicklungskoeffizienten.

Die Anwendung der Rekursionsformeln erfordert zunächst jedoch eine Entwicklung des Faktors $(1+g)/(k^2+(1+g)^2)$ nach g . Die Taylorentwicklung dieses Faktors hat die Form:

$$\frac{1+g}{k^2+(1+g)^2} = \sum_{v=0}^{\infty} B_v g^v .$$

Die B_v sind im Anhang (A 1) erklärt. Konsequente Anwendung der Rekursionsformeln liefert nunmehr eine unmittelbar zur Berechnung der Feldkoeffizienten führende rekursive Hilfsgröße

$$A_{\mu}^{2(v+1)} = \sum_{m=0}^{\infty} \{ m(m+1) B_{v-m+2} + (m+1)^2 B_{v-m+1} \} A_{m+1}^{2v} ,$$

mit $\mu, v = 0, 1, \dots, \infty$.

Die A_j^0 sind die Entwicklungskoeffizienten der z-Komponente des Feldes in der Symmetrieebene, also

$$A_j^0 = a_j , \quad j = 1, 2, \dots, \infty .$$

Mit dieser Hilfsgröße ergeben sich die Feldkoeffizienten c_v der Feldentwicklung (3) zu:

$$\begin{aligned} c_{2v+1} &= \sum_{\mu=0}^{\infty} (\mu+1)(-1)^v \frac{1}{(2v+1)!} A_{\mu+1}^{2v} g^{\mu} , \quad v = 0, 1, 2, \dots, \infty , \\ c_{2v} &= \sum_{\mu=0}^{\infty} (2v+1)(-1)^v \frac{1}{(2v)!} A_{\mu}^{2v} g^{\mu} , \quad v = 0, 1, 2, \dots, \infty . \end{aligned} \quad (5)$$

Die Entwicklungskoeffizienten des skalaren magnetischen Potentials (1) sind

$$\alpha_{\mu}^{2v+1} = \frac{(-1)^v}{(2v+1)!} A_{\mu}^{2v} , \quad v, \mu = 0, 1, 2, \dots, \infty . \quad (6)$$

Ein mit einem charakteristischen Satz von Feldkoeffizienten $a_j, j = 1, 2, 3, 4, 5$ erzeugter Feldverlauf in der Symmetrieffläche zeigt Figur 7. Zum Vergleich ist der Feldverlauf des entsprechenden Flachspektrometers eingezeichnet, dessen Koeffizient nach der Bedingung für Weitwinkelfokussierung ¹⁷ berechnet wurden.

3 Bewegungsgleichungen

Auf ein Teilchen der Ladung e und der Masse m , das sich mit der Geschwindigkeit v in einem Magnetfeld bewegt, wirkt die Lorentzkraft, aus der sich die Bewegungsgleichungen ableiten

$$\begin{aligned}\ddot{\vartheta} &= (1+g)(\omega_0 + \dot{\varphi})^2 + \frac{e}{m}(1+g)(\omega_0 + \dot{\varphi})H_z - \frac{e}{m}(\dot{\xi} + k\omega_0)H_\vartheta, \\ \ddot{\varphi} &= -2\dot{\vartheta}(\omega_0 + \dot{\varphi})/(1+g) - \frac{e}{m}\dot{\vartheta}H_z/(1+g) + \frac{e}{m}(\dot{\xi} + k\omega_0)H_r/(1+g), \\ \ddot{\xi} &= \frac{e}{m}\dot{\vartheta}H_\vartheta - \frac{e}{m}(1+g)(\omega_0 + \dot{\varphi})H_r.\end{aligned}\quad (7)$$

Der Energiesatz liefert

$$\dot{\vartheta}^2 + (1+g)^2(\omega_0 + \dot{\varphi})^2 + (\dot{\xi} + k\omega_0)^2 = v^2/c_0^2. \quad (8)$$

Jeder Punkt über einer Variablen repräsentiert eine Differentiation nach der Zeit t .

Für eine zur Bestimmung der Abbildungseigenschaften des Wendelfeldes notwendige Näherungsrechnung sind diese Bewegungsgleichungen nach den Variablen zu entwickeln. Hierzu werden die Feldkomponenten (3) in die Bewegungsgleichungen eingesetzt und die Beziehung

$$\frac{e}{m}H_0 = -\omega_0/(1+k^2) \quad (9)$$

verwendet, die sich als nullte Näherung unmittelbar aus der Gleichung für $\ddot{\vartheta}$ (7) ergibt. Eine Entwicklung bis zur vierten Ordnung hat folgende Form:

$$\begin{aligned}\ddot{\vartheta} &= \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 + \vartheta_4, \\ \ddot{\varphi} &= \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4, \\ \ddot{\xi} &= \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4.\end{aligned}\quad (10)$$

Die $\vartheta_\nu, \varphi_\nu, \xi_\nu, \nu = 1, \dots, 4$, sind die Anteile der Differentialgleichungen der ν -ten Ordnung und im Anhang A2 erklärt.

Bei der Definition der Anfangswerte soll der Tatsache Rechnung getragen werden, daß in praxi die Detektorsysteme an Quelle und Auffänger plan sind bzw. nur unter großem Aufwand mit einer der Wendelgeometrie angepaßten Krümmung versehen werden können ¹⁸. Deshalb wird ein kartesisches Koordinatensystem eingeführt, das den praktischen Gegebenheiten genügt. Die Achsen dieses Koordinatensystems seien definiert

durch den Normalvektor (ϑ -Achse) und den Binormalenvektor (δ -Achse) an die Sollbahn. Der Ursprung des Koordinatensystems habe den Winkel ϑ bzw. den reduzierten Winkel γ . Ein beliebiger Punkt (ϑ, ϕ, ξ) hat in einem solchen Koordinatensystem die Koordinaten

$$\begin{aligned}\vartheta &= \vartheta, \\ \delta &= (\phi - k\xi)/\sqrt{1+k^2}, \\ \gamma &= (\phi + k\xi)/(1+k^2).\end{aligned}\tag{11}$$

Die Anfangskoordinaten seien definiert durch

$$\begin{aligned}\vartheta(t=0) &= \vartheta_0, \\ \gamma(t=0) &= 0, \\ \delta(t=0) &= \delta_0.\end{aligned}$$

bzw. nach Umrechnung in ϕ und ξ :

$$\begin{aligned}\vartheta(t=0) &= \vartheta_0, \\ \phi(t=0) &= -\delta_0 k/\sqrt{1+k^2}, \\ \xi(t=0) &= \delta_0/\sqrt{1+k^2}.\end{aligned}\tag{12}$$

Die Anfangsgeschwindigkeiten und damit die Öffnungswinkel φ_r und φ_z werden analog zu den üblichen Definitionen eingeführt. Der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$ des Teilchens wird aufgespalten in eine Komponente $\vec{v}_z$, die durch Projektion von $\vec{v}$ auf die von dem Binormalen- und Tangentenvektor der Sollbahn in $\vartheta_0=0, \gamma=0, \delta=0$ aufgespannte Ebene entsteht, und in eine Komponente $\vec{v}_r$, die durch Projektion von $\vec{v}$ auf die durch den Normalen- und Tangentenvektor aufgespannte Ebene erzeugt wird. Die Komponente $\vec{v}_z$ bildet mit dem Tangentenvektor den Winkel φ_z , die Komponente $\vec{v}_r$ bildet mit dem Tangentenvektor den Winkel φ_r . Mit dieser Definition der Öffnungswinkel werden die Anfangsgeschwindigkeiten unter Zuhilfenahme von (8):

$$\begin{aligned}\dot{\vartheta}_0 &= \omega \sqrt{1+k^2} \cos \varphi_z \sin \varphi_r / \sqrt{1 - \sin^2 \varphi_r \sin^2 \varphi_z}, \\ \dot{\xi}_0 &= \omega \sqrt{1+k^2} \cos \varphi_r \sin \varphi_z / \sqrt{1 - \sin^2 \varphi_r \sin^2 \varphi_z}, \\ \dot{\phi}_0 &= \frac{1}{1+\vartheta} \cdot \sqrt{\omega^2(1+k^2) - \dot{\vartheta}_0^2 - (\dot{\xi}_0 + k\omega_0)^2} - \omega_0.\end{aligned}\tag{13}$$

Hierbei ist ω die Winkelgeschwindigkeit der Teilchen, und für Sollteilchen gilt

$$\omega = \omega_0.$$

Für Teilchen, deren Impuls p vom Sollimpuls p_0 um Δp abweicht, ist die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega.$$

Normiert man p auf p_0 bzw. ω auf ω_0 , so ist

$$\Delta p/p_0 = \Delta \omega/\omega_0$$

und

$$\omega = 1 + \Delta \omega/\omega_0 .$$

Eine Entwicklung der Anfangswerte (13) bis zur vierten Ordnung ist im Anhang A3 gegeben.

4 Erste Näherung

Bricht man die Feldentwicklung (3) nach der ersten Ordnung ab, so erhält das Feld folgende Form:

$$\begin{aligned} H_r &= H_0 a_1 (\xi - k \phi) , \\ H_z &= H_0 (1 + a_1 \eta) , \\ H_\theta &= -H_0 k (1 + (a_1 - 1) \eta) . \end{aligned} \quad (14)$$

Der Energiesatz (8) ergibt in erster Näherung:

$$\dot{\phi} = -\omega_0 \eta - k \dot{\xi} . \quad (15)$$

Die Feldkomponenten (14) und die Beziehung (15) werden in die auf die erste Ordnung beschränkten Bewegungsgleichungen (10) eingesetzt, die damit die Form annehmen:

$$\begin{aligned} \ddot{\eta} &= -\omega_0^2 \left(a_1 + \frac{1}{1+k^2} \right) \eta - 2\omega_0 k \dot{\xi} , \\ \ddot{\phi} &= -\omega_0 \frac{1+2k^2}{1+k^2} \dot{\eta} + \omega_0^2 a_1 \frac{k^2}{1+k^2} \phi - \omega_0^2 a_1 \frac{k}{1+k^2} \xi , \\ \ddot{\xi} &= \omega_0 \frac{k}{1+k^2} \dot{\eta} - \omega_0^2 a_1 \frac{k}{1+k^2} \phi + \omega_0^2 a_1 \frac{1}{1+k^2} \xi . \end{aligned} \quad (16)$$

Die Methode der Lösung eines Systems von linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen bekannt ¹⁹. Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind

$$\begin{aligned} \lambda_{1/2} &= 0 , \\ \lambda_{3/4} &= \pm i\omega_0 s_1 , \\ \lambda_{5/6} &= \pm i\omega_0 s_2 , \end{aligned} \quad (17)$$

wobei

$$s_{1/2} = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \frac{1+2k^2}{1+k^2} \pm \sqrt{\left(\frac{1+2k^2}{1+k^2} \right)^2 + 4a_1 \left(a_1 + \frac{1-2k^2}{1+k^2} \right)} \right\}} . \quad (18)$$

Die allgemeine Lösung von (16) ist also eine Superposition von Sinus- und Kosinusschwingungen der Frequenzen $\omega_0 s_1$ und $\omega_0 s_2$ sowie eines Polynoms in t vom Grade 1. Die Schwingungen der Frequenz $\omega_0 s_1$ sind für alle k und a_1 stabil. Die Schwingungen der Frequenz $\omega_0 s_2$ sind dagegen nur stabil im Bereich

$$\begin{aligned} 0 \leq |a_1| \leq (1-2k^2)/(1+k^2) \leq 1, \quad a_1 < 0, \\ 0 \leq a_1 \leq (2k^2-1)/(1+k^2) \leq 2, \quad a_1 > 0. \end{aligned}$$

Die Bahngleichungen sind

$$\begin{aligned} g(t) &= g_0 + C_3 (\cos \omega_0 s_1 t - 1) + C_4 \sin \omega_0 s_1 t \\ &\quad - C_5 K_{22} \sin \omega_0 s_2 t + C_6 K_{22} (\cos \omega_0 s_2 t - 1), \\ \phi(t) &= C_1 t + C_2 - C_3 K_{41} \sin \omega_0 s_1 t + C_4 K_{41} \cos \omega_0 s_1 t \\ &\quad + C_5 K_{42} \cos \omega_0 s_2 t + C_6 K_{42} \sin \omega_0 s_2 t, \\ \xi(t) &= k(C_1 t + C_2) - C_3 K_{61} \sin \omega_0 s_1 t + C_4 K_{61} \cos \omega_0 s_1 t \\ &\quad + C_5 \cos \omega_0 s_2 t + C_6 \sin \omega_0 s_2 t. \end{aligned} \quad (19)$$

Die Koeffizienten K_{ij} sind im Anhang A4 erklärt. Die Koeffizienten C_μ der Bahngleichungen lassen sich aus den Anfangswerten der ersten Näherung (vgl. Anhang A3) bestimmen. Die Anfangswerte der Geschwindigkeiten sind für Sollteilchen in erster Näherung:

$$\begin{aligned} \dot{s}_0 &= \omega_0 \sqrt{1+k^2} \, y_r, \\ \dot{\phi}_0 &= -\omega_0 (g_0 + k \sqrt{1+k^2} \, y_z) \\ \dot{\xi}_0 &= \omega_0 \sqrt{1+k^2} \, y_z. \end{aligned} \quad (20)$$

Setzt man diese Anfangswerte in die Bahngleichungen (19) zur Zeit $t = 0$ ein, so erhält man die C_μ :

$$\begin{aligned} C_1 &= \omega_0 g_0 - C_3 - K_{22} C_6, \\ C_2 &= \phi_0 - Q_{45} \{ (K_{41} E - K_{42} C) \sqrt{1+k^2} \, y_r + (S_1 K_{42} - S_2 K_{22} K_{41}) (\xi_0 - k \phi_0) \}, \\ C_3 &= Q_{36} \{ (S_2 E - k B) g_0 - (B(1+k^2) + a S_2 E) \sqrt{1+k^2} \, y_z \}, \\ C_4 &= Q_{45} \{ E \sqrt{1+k^2} \, y_r + S_2 K_{22} (\xi_0 - k \phi_0) \}, \\ C_5 &= Q_{45} \{ -C \sqrt{1+k^2} \, y_r + S_1 (\xi_0 - k \phi_0) \}, \\ C_6 &= Q_{36} \{ (S_1 C + k A) g_0 + (A(1+k^2) - a S_1 C) \sqrt{1+k^2} \, y_z \}. \end{aligned} \quad (21)$$

Die hierin auftretenden Konstanten sind im Anhang A5 erklärt.

Zur Bestimmung der Dispersion müssen die Bahnen von Teilchen berechnet werden, deren Impuls von p_0 um Δp abweicht. Es läßt sich zeigen, daß es in dem Feld (14) genau eine Wendel gibt, die ein Teilchen mit dem Impuls $p_0 + \Delta p$ durchläuft, wenn es tangential zu ihr startet. Diese Wendel hat die Form

$$\vartheta = \varepsilon = \text{const.}, \quad \xi - k\phi = 0.$$

ε läßt errechnen, wenn man in die Impuls-Feldstärkerelation

$$eH/\kappa = p,$$

wo κ die Krümmung der Teilchenbahn ist, das Feld in der Sollfläche in erster Ordnung und für die Krümmung die aus der Differentialgeometrie bekannte Beziehung (20)

$$1/\kappa = r_0 (1 + \vartheta) (1 + k^2/(1 + \vartheta)^2)$$

einsetzt. Berücksichtigt man, daß ε für p_0 verschwindet, so erhält man

$$\varepsilon = \frac{\Delta p}{p_0} \frac{1 + k^2}{1 + a_1 + k^2(a_1 - 2)} \quad (22)$$

Die Bewegung von Teilchen mit Impuls $p_0 + \Delta p$ im Sollfeld kann deshalb dadurch beschrieben werden, daß mittels einer Koordinatentransformation die reduzierten Koordinaten auf die Wendel $\vartheta = \varepsilon$ bezogen werden. Die Bewegungsgleichungen gehen dabei in sich über. Es verändern sich lediglich die Anfangswerte, die in den transformierten Koordinaten (im folgenden mit einem Strich gekennzeichnet) folgende Werte annehmen:

$$\begin{aligned} \vartheta'_0 &= \vartheta_0 - \varepsilon, \\ \phi'_0 &= \phi_0, \\ \xi'_0 &= \xi_0, \\ \dot{\vartheta}'_0 &= \dot{\vartheta}_0, \\ \dot{\phi}'_0 &= \dot{\phi}_0 + \omega_0 \varepsilon (1 + k^2/\sqrt{1 + k^2}), \\ \dot{\xi}'_0 &= \dot{\xi}_0 - \omega_0 \varepsilon k/\sqrt{1 + k^2}. \end{aligned} \quad (23)$$

In den Bahngleichungen tritt deshalb zu den Termen in $\vartheta_0, \phi_0, \xi_0, \dot{\vartheta}_0, \dot{\xi}_0$ noch ein Term in ε . Zur Ermittlung der Dispersion ist nur die Radialkomponente der Bahn wichtig. Substituiert man ε durch $\Delta p/p_0$ und

bildet den Quotienten $g/\Delta p/p_0$, so ist die radiale Abweichung der Teilchen mit Impuls $p_0 + \Delta p$ von der Sollbahn in erster Näherung:

$$d = \frac{g}{\Delta p/R} = \frac{1+k^2}{1+a_1+k^2(a_1-2)} Q_{36} \left\{ (\cos \omega_0 s_1 t - 1) \cdot \right. \\ \left. (S_2 E (a k / \sqrt{1+k^2} - 1) + k B (1 + \sqrt{1+k^2})) + \right. \\ \left. + K_{22} (\cos \omega_0 s_2 t - 1) (S_1 C (a k / \sqrt{1+k^2} - 1) + k A (1 + \sqrt{1+k^2})) \right\}. \quad (24)$$

Am Auffänger hat d den Wert D und heißt Dispersion.

Man erkennt, daß die Dispersion im wesentlichen durch den Faktor $\frac{1+k^2}{1+a_1+k^2(a_1-2)}$ bestimmt ist. In der Praxis wird k von der Größenordnung 10^{-1} sein, so daß der Nenner hauptsächlich von $1+a_1$ abhängt. Da a_1 dem Betrage nach kleiner als Eins und negativ ist, verkleinert der Term $k^2(a_1-2)$ den Nenner weiter. Figur 8 zeigt die Dispersion in Abhängigkeit von k für einen Fokussierungswinkel, wie er im folgenden eingeführt wird.

Am Ort des Fokussierungswinkels, also am Auffänger, soll die Abbildung möglichst keine Fehler enthalten, die von den Öffnungswinkeln φ_r und φ_z herrühren. Die φ_r - und φ_z -abhängigen Terme der Bahngleichungen (19) sind

$$g(t) = \varphi_r Q_{45} \sqrt{1+k^2} \{ E \sin \omega_0 s_1 t + K_{22} C \sin \omega_0 s_2 t \} \\ + \varphi_z Q_{36} \sqrt{1+k^2} \{ (B(1+k^2) + a s_2 E)(1 - \cos \omega_0 s_1 t) \\ - K_{22} (A(1+k^2) - a s_1 C)(1 - \cos \omega_0 s_2 t) \}, \quad (25a)$$

$$\phi(t) = C_1 t + C_2 \\ + \varphi_r Q_{45} \sqrt{1+k^2} \{ K_{41} E \cos \omega_0 s_1 t - K_{42} C \cos \omega_0 s_2 t \} \\ + \varphi_z Q_{36} \sqrt{1+k^2} \{ (B(1+k^2) + a s_2 E) K_{41} \sin \omega_0 s_1 t \\ + (A(1+k^2) - a s_1 C) K_{42} \sin \omega_0 s_2 t \}, \quad (25b)$$

$$\xi(t) = k(C_1 t + C_2) \\ + \varphi_r Q_{45} \sqrt{1+k^2} \{ K_{61} E \cos \omega_0 s_1 t - C \cos \omega_0 s_2 t \} \\ + \varphi_z Q_{36} \sqrt{1+k^2} \{ (B(1+k^2) + a s_2 E) K_{61} \sin \omega_0 s_1 t \\ + (A(1+k^2) - a s_1 C) \sin \omega_0 s_2 t \}. \quad (25c)$$

Als Fokussierungswinkel wird üblicherweise derjenige Winkel definiert, in dem der φ_r - und der φ_z -Anteil der radialen Bahnkomponente Null wird. Man erkennt allerdings, daß dies streng nur für $k=0$ erfüllt werden kann, also für Flachspektrometer. Hier soll der Fo-

kussierungswinkel des Wendelspektrometers der Winkel sein, in dem der φ_r - Anteil der radialen Bahnkomponente Null wird. In einem später folgenden Zahlenbeispiel zeigt sich, daß der Koeffizient des φ_z - Anteils von der Größenordnung 10^{-8} ist.

Eine solche Definition des Fokussierungswinkels hat zur Folge, daß man zweckmäßig fordert:

$$\sin \omega_{0s_1} t^* = \sin \omega_{0s_2} t^* = 0. \quad (26)$$

Hier und im folgenden sind Variable am Ort des Fokussierungswinkels mit einem Stern gekennzeichnet.

Eine andere Nullstelle des φ_r - abhängigen Termes von (25a) als die durch (26) gegebene ist wegen der Verschiedenheit der Amplituden E und $K_{22}C$, die sich um einen Faktor >10 unterscheiden (vgl. (29a)) ausgeschlossen.

Zugleich soll am Fokussierungswinkel die Dispersion nicht verschwinden. Das bedeutet nach Gl. (24)

$$\cos \omega_{0s_1} t^* = \cos \omega_{0s_2} t^* = -1. \quad (27)$$

Die Bedingungen (26) und (27) legen den ersten Feldkoeffizienten fest. Es gilt zunächst

$$\begin{aligned} \omega_{0s_1} t^* &= m\pi, \\ \omega_{0s_2} t^* &= n\pi, \quad m, n \text{ ganz, ungerade.} \end{aligned} \quad (28)$$

Damit und mit Gl. (18) folgt für den ersten Feldkoeffizienten a_1 :

$$a_1 = - \frac{1-2k^2}{1+k^2} + \sqrt{\left(\frac{1-2k^2}{1+k^2}\right)^2 - 4 \left(\frac{mn}{m^2+n^2}\right)^2 \left(\frac{1+2k^2}{1+k^2}\right)^2} \quad (29)$$

Das theoretisch noch mögliche negative Vorzeichen der Wurzel kommt nicht in Frage, da nach Gl. (24) a_1 möglichst nahe an -1 liegen muß, um die gewünschte hohe Dispersion zu erhalten.

Nachdem das Feld in erster Näherung auf diese Weise festgelegt ist, erhebt sich die Frage nach der axialen Fokussierung in die Sollfläche zurück. Die Bahngleichungen (25b) und (25c) zeigen, daß wegen der Bedingung (26) die oszillierenden Anteile des axialen Öffnungswinkels φ_z im Fokussierungswinkel verschwinden. Die oszillierenden Terme in dem radialen Öffnungswinkel φ_r sowie die konstanten und

in t linearen Anteile von $\phi(t)$ und $\xi(t)$ erfüllen die Relation

$$\xi(t^*) - k \phi(t^*) = 0.$$

Dies bedeutet nach Gl. (11), daß

$$\delta^* = 0,$$

d.h., daß sich die Teilchen am Fokussierungswinkel in der Sollfläche befinden. Axiale Fokussierung in erster Näherung ist also sowohl für φ_r als auch für φ_z gewährleistet.

Numerisches Beispiel

Als Beispiel soll der Fall diskutiert werden, für den $n = 1$ und $m = 5$ gesetzt ist. Dies ermöglicht auch einen Vergleich mit dem Flachspektrometer der gleichen Bedingung, also einer halben radialen und fünf halben axialen Schwingungen zwischen Quelle und Empfänger. Für k wird der realistische und in dem folgenden Kapitel begründete Wert $k = 0,135$ gewählt. Mit diesen Werten ist der erste Feldkoeffizient

$$\alpha_1 = -0,903912.$$

Weiter ist

$$S_1 = 0,989317,$$

$$S_2 = 0,197863.$$

Aus der Definition des Fokussierungswinkels als $\vartheta^* = \omega \cdot t^*$ folgt wegen Gl. (28)

$$\vartheta^* = 5,053990 \cdot \pi$$

oder $\vartheta^* = 909,72^\circ.$

Die Radialkomponente der Bahn, die vom Gesichtspunkt der Spektrogeometrie am wichtigsten ist, veranschaulicht gut die Größenverhältnisse der Konstanten.

$$\begin{aligned} g(t) = & \varphi_r \{ 0,081238 \sin \omega_{0s_1} t + 4,693649 \sin \omega_{0s_2} t \} \\ & + \varphi_z \{ 0,289963 (\cos \omega_{0s_1} t - 1) - 0,289963 (\cos \omega_{0s_2} t - 1) \} \\ & + g_0 \{ 1 + 0,041548 (\cos \omega_{0s_1} t - 1) + 0,958452 (\cos \omega_{0s_2} t - 1) \} \\ & - (\xi_0 - k \phi_0) \{ -0,257851 \sin \omega_{0s_1} t + 1,289253 \sin \omega_{0s_2} t \} \\ & - \varepsilon \{ 0,079993 (\cos \omega_{0s_1} t - 1) + 0,920007 (\cos \omega_{0s_2} t - 1) \}. \end{aligned} \quad (29a)$$

Zur Abschätzung der in der radialen Bahnkomponente $g(t)$ noch vorhandenen Abbildungsfehler erster Ordnung ist $g(t^*)$ zu bilden,

$$g(t^*) = -1,000000 g_0 - 1,3 \cdot 10^{-8} g_2 + 2,000000 \cdot \varepsilon.$$

Die Quelle wird also im Meßstab -1 abgebildet. Der Öffnungsfehler in φ_2 ist mit dem Faktor $1,3 \cdot 10^{-8}$ versehen und in praxi vernachlässigbar klein.

Um die Dispersion bestimmen zu können, muß noch ε angegeben werden. Es ist

$$\varepsilon = 23,589778 \cdot \Delta p / p_0.$$

Hiermit ergibt sich die Dispersion zu

$$D = 47,179556.$$

Alle weiteren Rechnungen gelten für das Spektrometer mit $n = 1$ und $m = 5$.

5 Zweite Näherung

Nachdem die erste Näherung durch geeignete Wahl des ersten Feldkoeffizienten a_1 praktisch Doppelfokussierung in φ_r und in φ_z ergeben hat, soll in einer zweiten Näherung der Zusammenhang zwischen den Abbildungsfehlern zweiter Ordnung und dem zweiten Feldkoeffizienten sowie der Steigung k der Wendel aufgedeckt werden. Wegen des Umfangs des für eine geschlossene Behandlung nötigen mathematischen Aufwandes wurden diese Rechnungen numerisch durchgeführt.

Die Bewegungsgleichungen bis zur zweiten Ordnung haben die Form

$$\begin{aligned} \ddot{g} &= g_1 + g_2, \\ \ddot{\phi} &= \phi_1 + \phi_2, \\ \ddot{\xi} &= \xi_1 + \xi_2, \end{aligned} \tag{30}$$

wobei die g_v, ϕ_v, ξ_v ($v=1,2$) im Anhang A2 erklärt sind. Diese Differentialgleichungen werden mit den Anfangswerten bis zur zweiten Näherung, die ebenfalls dem Anhang A3 entnommen werden können, integriert. Da

die Integration nach der Zeit t erfolgt, ist der Winkel immer

$$\varphi = \omega_0 t + \phi .$$

Die Integration geht demnach von $t = 0$ bis $t = t^* = \frac{\varphi^* - \phi}{\omega_0}$. Am Fo - kussierungswinkel werden die Bahnkoordinaten nach den Anfangswerten φ_0, δ_0 und den Öffnungswinkeln φ_r, φ_z entwickelt. Diese Entwicklung lautet für die im Hinblick auf die Spektroskopie interessante radiale Bahnkoordinate:

$$\begin{aligned} \varrho^* = & -\varphi_0 + R_{\varphi_r^2} \varphi_r^2 + R_{\varphi_z^2} \varphi_z^2 + R_{\varphi_r \varphi_z} \varphi_r \varphi_z + R_{\varphi_r \varphi_0} \varphi_r \varphi_0 \\ & + R_{\varphi_r \delta_0} \varphi_r \delta_0 + R_{\varphi_z \varphi_0} \varphi_z \varphi_0 + R_{\varphi_z \delta_0} \varphi_z \delta_0 + R_{\varphi_0^2} \varphi_0^2 + R_{\delta_0^2} \delta_0^2 \\ & + R_{\varphi_0 \delta_0} \varphi_0 \delta_0 + \text{Terme höherer Ordnung} . \end{aligned} \quad (31)$$

Die Bestimmung der einzelnen Aberrationsterme zweiter Ordnung erfolgt nach dem folgenden Schema. Zunächst werden für verschiedene Werte nur eines Anfangswertes φ_0 bzw. δ_0 oder nur eines Öffnungswinkels φ_r bzw. φ_z die radialen Koordinaten am Bildort ϱ^* berechnet. Diese Bildkoordinaten ϱ^* werden mittels einer Ausgleichsrechnung durch ein Polynom in der zur Anwendung gekommenen Anfangsvariablen φ_0 oder δ_0 bzw. φ_r oder φ_z approximiert. Berücksichtigt man, daß für den Anfangswert φ_0 die Bildkoordinate in erster Näherung $-\varphi_0$ ist, also $\varrho^*(\varphi_0) = -\varphi_0$, so ist der niederste Term eines solchen Polynomes quadratisch, da die Abbildung durch passende Wahl von a_1 in erster Näherung von φ_r und praktisch von φ_z sowie von δ_0 unabhängig ist. Damit ist er gleichzeitig der Aberrationsterm zweiter Ordnung in der entsprechenden Anfangskoordinate bzw. dem entsprechenden Öffnungswinkel.

Die Bestimmung der in den Anfangsvariablen gemischten Abbildungsfehler erfolgt analog. Für verschiedene Werte eines Anfangswertepaares, etwa $\varphi_r = \varphi_z$, werden die radialen Bahnkomponenten am Bildort ϱ^* bestimmt. Nach Addition der Anfangskoordinate φ_0 zu ϱ^* im Falle, daß $\varphi_0 \neq 0$ ist, wird ϱ^* wieder durch ein Polynom in dem Anfangswertepaar, etwa in $\varphi_r = \varphi_z$ approximiert. Der niederste Term ist wieder quadratisch und stellt nach Abzug der reinen Fehler zweiter Ordnung der Anfangswerte des benützten Anfangswertepaares den Fehler zweiter Ordnung in diesem Anfangswertepaar dar. Im Falle von $\varphi_r = \varphi_z$ ist die radiale Bildkomponente

$$\varrho^*(\varphi_r, \varphi_z) = R_{\varphi_r^2} \varphi_r^2 + R_{\varphi_z^2} \varphi_z^2 + R_{\varphi_r \varphi_z} \varphi_r \varphi_z + \text{Terme höherer Ordnung} .$$

Die Approximation durch ein Polynom in $\varphi = \varphi_r = \varphi_z$ liefert als niedersten Term

$$R = R_{\varphi_r^2} + R_{\varphi_z^2} + R_{\varphi_r \varphi_z}$$

Nach diesem Verfahren sind für drei verschiedene Steigungen k ($k = 0; 0,1; 0,135$) der Wendel die Aberrationsterme zweiter Ordnung berechnet worden, wobei jeweils mehrere Werte für den zweiten Feldkoeffizienten a_2 benutzt wurden. Der Zusammenhang zwischen dem Feldkoeffizienten a_2 und den Abbildungsfehlern zweiter Ordnung ist linear, da sie von derselben Ordnung sind. Figur 9 zeigt diese Abhängigkeit für $k = 0,135$. Diese Figur zeigt, daß jeder der Aberrationsterme durch geeignete Wahl von a_2 zum Verschwinden gebracht werden kann. Da der Aberrationsterm in φ_r^2 die größte Steigung hat und damit am einflußreichsten ist, wird im folgenden a_2 so gewählt, daß der Fehler $R_{\varphi_r^2}$ verschwindet, also

$$a_2 = 0,78926.$$

Eine Analyse der Abhängigkeit der Aberrationsterme zweiter Ordnung von der Steigung k der Wendel bei einer von φ_r^2 unabhängigen Abbildung (siehe Tabelle 2) zeigt, daß durch geeignete Wahl von k der Aberrationsterm zweiter Ordnung in dem axialen Öffnungswinkel φ_z zum Verschwinden gebracht werden kann. Der Wendelcharakter des Feldes erzeugt überdies Fehler in $\varphi_r \varphi_z$, $\varphi_r \delta_o$, $\varphi_z \delta_o$ und $\varphi_z \varphi_o$, die im Falle des Flachspektrometers ($k=0$) Null sind. Da in praxi die Anfangswerte φ_z , φ_o , δ_o groß gegen den Öffnungswinkel φ_r sein werden, sind die Fehler in $\varphi_r \varphi_z$, $\varphi_r \delta_o$ und $\varphi_z \delta_o$ von geringerer Bedeutung als die Fehler in φ_z^2 und der Fehler in δ_o verkleinert sich auf ungefähr $\frac{1}{7}$ seines Wertes für $k = 0$. Hierdurch werden die gegenüber dem Flachspektrometer neu hinzugekommenen Abbildungsfehler zweiter Ordnung im Falle herkömmlicher Spektroskopie praktisch kompensiert. Aufgrund dieser Überlegung wird im weiteren die Steigung der Wendel $k = 0,135$ gesetzt, so daß der Fehler in φ_z^2 praktisch verschwindet ($R_{\varphi_z^2} = 0,005$).

In Tabelle 2 sind zum Vergleich noch die Abbildungsfehler des korrespondierenden Flachspektrometers mit einem azimuthal veränderlichen Feld (AVF) eingetragen ²². Von den im Falle des AVF-Spektrometers gegenüber dem Flachspektrometer mit Rotationssymmetrie neu hinzugekommenen Abbildungsfehlern ist besonders derjenige in $\varphi_z \delta_o$ sehr ein-

flußreich, da sowohl φ_z als auch δ_0 in praxi groß gemacht werden sollen.

6 Höhere Näherungen

Im vorigen Abschnitt hat sich gezeigt, daß der Aberrationsfehler zweiter Ordnung in dem radialen Öffnungswinkel φ_r den größten Einfluß hat. Deshalb wurde dort der Fehler in φ_r^2 durch geeignete Wahl von a_2 zum Verschwinden gebracht. Da die Fehler in φ_r auch in den höheren Näherungen sehr groß sind, wie die Rechnungen gezeigt haben (vgl. Figur 10), soll das Wendelspektrometer in Bezug auf den radialen Öffnungswinkel φ_r mit Weitwinkelfokussierung versehen werden, d.h. die Abbildung wird durch Wahl der Feldkoeffizienten von φ_r unabhängig gemacht. In den höheren Näherungen werden deshalb nur noch die Terme in φ_r berechnet.

Das Verfahren ist dasselbe wie für die Bestimmung des Aberrationstermes in φ_r^2 der zweiten Näherung. Für verschiedene Werte von φ_r werden die Bildkoordinaten $\xi^*(\varphi_r)$ durch Integration der Bewegungsgleichungen bis zur n-ten Ordnung (vgl. Anhang A3) unter Verwendung der Anfangsbedingungen ebenfalls bis zur n-ten Ordnung (Anhang A4) berechnet und durch ein Polynom approximiert. Der niederste Term, der vom Grad n ist, stellt den Fehler in φ_r^n dar, sofern alle Aberrationsterme in φ_r niedrigerer Ordnung Null sind. Der Zusammenhang zwischen dem Feldkoeffizienten a_n und dem Aberrationsterm $R_{\varphi_r^n}$ ist linear. Die Nullstelle von $R_{\varphi_r^n}$ ist leicht zu bestimmen (Figur 10). Die sich daraus ergebenden Feldkoeffizienten sind

$$\begin{aligned} a_3 &= -0,674, \\ a_4 &= 0,638, \\ a_5 &= -0,559. \end{aligned}$$

Der fünfte Feldkoeffizient a_5 ist willkürlich gewählt, da das Verfahren zur Bestimmung der Feldkoeffizienten bei höheren Ordnungen instabil wird (vgl. Abschnitt 7).

7 Genauigkeitsbetrachtungen

Die soeben beschriebenen Rechnungen erfolgten numerisch, indem die Bewegungsgleichungen nach einem Extrapolationsverfahren ²¹ integriert wurden. Die Genauigkeit des Integrationsverfahrens sowie die Genauigkeit der Methode zur Bestimmung der Aberrationsterme wurde anhand von Rechnungen derselben Art für $k = 0$, also für Flachspektrometer geprüft, da hier die Resultate aus den Formeln des Flachspektrometers bekannt sind ^{8,17,22}. Dabei ergibt sich, daß die Genauigkeit des Integrationsverfahrens bei einem mit mehr als 11 Dezimalstellen rechnenden Computer unkritisch und um Größenordnungen besser ist als die Genauigkeit zur Bestimmung der Aberrationsterme. Die Bestimmung der Feldkoeffizienten ist wegen der Empfindlichkeit der Aberrationsterme in φ gegen kleine Schwankungen in den Feldkoeffizienten besonders kritisch. Figur 11 zeigt einen Vergleich der theoretischen Werte der Feldkoeffizienten mit den numerisch berechneten für $k = 0$ sowie die für $k = 0,1$ und $k = 0,135$ errechneten Feldkoeffizienten. Die theoretischen Werte der Feldkoeffizienten für $k = 0$ sind nach den Formeln für Weitwinkelfokussierung beim Flachspektrometer ¹⁷ berechnet. Die Genauigkeit der Feldkoeffizientenbestimmung nimmt mit wachsender Ordnung ab. Die Fehler der numerisch bestimmten Werte gegenüber den theoretischen für $k = 0$ sind in Prozenten der theoretischen Werte für

$$a_2 : 0,1 \% ,$$

$$a_3 : 1,0 \% ,$$

$$a_4 : 10 \% .$$

Der Grund für die Zunahme der Ungenauigkeit liegt im wesentlichen in der Fortpflanzung der Fehler aus den niedrigeren Ordnungen in die höhere.

Für die Feldkoeffizienten bei $k = 0,1$ und $k = 0,135$ kann mit einer entsprechenden Genauigkeit gerechnet werden. Wegen der Instabilität des Verfahrens zur Bestimmung der Feldkoeffizienten wurde für $k = 0,135$ der Feldkoeffizient a_5 nicht berechnet, sondern willkürlich $a_5 = - 0,559$ gesetzt.

Bei den Abbildungsfehlern zweiter Ordnung sind die Abweichungen der numerisch ermittelten Werte von den theoretischen Werten für $k = 0$ dem Betrage nach kleiner als 10^{-4} . Dieselbe Genauigkeit dürfte für die Abbildungsfehler zweiter Ordnung für $k = 0,1$ und $k = 0,135$ gegeben sein.

8 Intensitätsverteilungen und Auflösung

Eine Abschätzung der für das Wendelspektrometer erwarteten Auflösung ist durch die Angabe der Linienbasisbreite der erwarteten Intensitätsverteilung in zweiter Näherung unter Verwendung der aus der ersten Näherung bekannten Dispersion möglich. Die Linienbasisbreite ist für das Wendelspektrometer mit $k = 0,135$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \Delta s^* = & 2|\lambda| + 0,005 \cdot 2 \cdot |\varphi_{z\max}|^2 + 0,501 \cdot 2 \cdot |\lambda|^2 + 0,145 \cdot 2 \cdot |\mu|^2 \\ & + 0,321 \cdot 2 \cdot |\varphi_{r\max} \cdot \varphi_{z\max}| + 0,813 \cdot 2 \cdot |\varphi_{r\max} \cdot \lambda| \\ & + 1,320 \cdot 2 \cdot |\varphi_{r\max} \cdot \mu| + 0,735 \cdot 2 \cdot |\varphi_{z\max} \cdot \lambda|. \end{aligned}$$

Hierbei ist λ die halbe Quellenbreite und μ die halbe Quellenhöhe. $\varphi_{r\max}$ bzw. $\varphi_{z\max}$ sind die maximalen Emissionswinkel.

Nimmt man eine Dreiecksverteilung für die Intensitätsverteilung am Auffänger an, so ist die Auflösebreite die durch die Dispersion D dividierte Halbwertbreite dieser Verteilung, also

$$2 \cdot \Delta p / p_0 = \Delta s^* / D.$$

Tabelle 3 zeigt die Auflösung des Wendelspektrometers mit $k = 0,135$ für eine Quelle der Gesamtbreite $2\lambda = 10^{-2}$ und einer Gesamthöhe von $2\mu = 10^{-1}$ bei einem Emissionsraumwinkel von $0,42\%$ von 4π . Zum Vergleich sind die Auflösungen der korrespondierenden Flachspektrometer mit rotationssymmetrischem Feld und mit einem azimutabhängigen Feld ²² angegeben. Die sehr großen Fehler des Flachspektrometers in φ_z^2 und δ^2 sowie diejenigen des AVF-Spektrometers in φ_δ und δ^2 (vergl. Tabelle 2) schränken die Auflösung erheblich ein, da diese Fehler von Anfangswerten herrühren, die groß gemacht werden können, ohne die Amplituden der Teilchenbahnen zu sehr anwachsen zu lassen.

Im folgenden soll die Intensitätsverteilung, die eine isotropstrahlende Punktquelle am Auffänger erzeugt, unter Zugrundelegung des mit

den aus Abschnitt 6 angegebenen Feldkoeffizienten berechneten Feldes bis zur 10. Ordnung und unter Benutzung der exakten Bewegungsgleichungen (7) errechnet werden.

Die Intensität, die in ein Raumwinkelement $d\omega$ emittiert wird, ist

$$dI = I_0 d\omega / 4\pi, \quad (32)$$

wenn I_0 die gesamte von der Quelle ausgehende Intensität ist. Das Raumwinkelement $d\omega$ erzeugt je nach Größe seiner Öffnungswinkel φ_r und φ_z und den Anfangskoordinaten der Quelle φ_0, δ_0 ein Bildflächenelement $dF(q^*, \delta^*)$, wobei die Lage von dF in der Bildebene durch die Bildkoordinaten q^*, δ^* eines Teilchens fixiert ist, das mit Öffnungswinkeln $\bar{\varphi}_r$ und $\bar{\varphi}_z$ startet, durch die die Mitte von $d\omega$ gegeben ist. Die in dieses Flächenelement fallende Intensität ist gerade dI , und die Flächenintensität ist demnach

$$J(q^*, \delta^*) = dI / dF. \quad (33)$$

Die numerische Berechnung der Flächenintensitätsverteilung erfolgte durch Aufteilung eines Raumwinkelrechteckes mit $|\varphi_r| \leq \varphi_{r0}$ und $|\varphi_z| \leq \varphi_{z0}$ in 400 gleichgroße Rechtecke der Seitenlängen $\varphi_{r0}/10$, $\varphi_{z0}/10$. Jedes Rechteck wurde als Raumwinkelement $d\omega$ durch seine vier Eckpunkte auf die Bildebene abgebildet und die dabei umschlossene Fläche berechnet. Nach (32) wurde dI und nach (33) $J(q^*, \delta^*)$ berechnet. Voraussetzung für die Konsistenz des Verfahrens ist die Konstanz der Flächenintensität innerhalb des endlich ausgedehnten Flächenelementes ΔF , die zwar nicht erfüllt ist, aber für kleine ΔF eine gute Approximation darstellt. Die Methode liefert eine Flächenintensitätsverteilung der Punktquelle am Auffänger. In Figur 12 sind die zu gleichen Flächenintensitäten gehörigen Emissionswinkel φ_r und φ_z einer Punktquelle in $\varphi_0=0$ und $\delta_0=0$ dargestellt. Aus der Figur kann die maximale Flächenintensität ermittelt werden. Die Figur zeigt, daß bei Öffnungswinkeln von $|\varphi_r| \leq 0,01$ und $|\varphi_z| \leq 0,03$ die Flächenintensität steil zunimmt, während sie außerhalb dieses Bereiches weniger als 1 % ihres Maximalwertes hat, d.h. die Abbildung wird bei größeren Öffnungswinkeln schnell schlechter.

Figur 13 zeigt die Bilder der Kurven I - IV aus Figur 12. Die Linie $\varphi_r=0$ teilt offenbar die Kurven I - IV der Figur 12, bzw. den von

diesen Kurven umschlossenen Raumwinkel in zwei Bereiche, die bei der Abbildung zwar zusammenhängende aber sich überschneidende Kurven bzw. sich überlappende Flächen ergeben. Die Kurven I - IV der Figur 12 umschließen Flächen, von denen jede die nächst kleinere ganz enthält. Nach der Transformation auf die Bildebene ist dies nur noch für die Flächen mit $\varphi_r \gg 0$ und nur für den Bereich rechts der Bildkurve von $\varphi_r = 0$ der Fall. Die Flächen mit $\varphi_r \leq 0$ überlappen. Dies hat seine Ursache in den nicht verschwindenden Abbildungsfehlern höherer Ordnung. Die Kurven I - IV der Figur 13 sind deshalb nur dort Linien gleicher Flächenintensität, wo sie sich nicht überschneiden. Dies trifft z.B. für den gesamten Raumwinkel mit $\varphi_r \gg 0$ zu, sofern die Bildkurven rechts der Linie für $\varphi_r = 0$ liegen.

Deshalb kann für $\varphi_r \gg 0$ in diesem Bereich ohne Schwierigkeit eine Flächenintensitätsverteilung abgelesen werden.

Für $\varphi_r \leq 0$ sind in den Punkten, wo sich die Kurven schneiden, die zugehörigen Flächenintensitäten zu addieren, um die Flächenintensität in diesem Punkte zu erhalten. In den Bereichen, wo sich die Flächen zwischen der Kurve für $\varphi_r = 0$ und den Kurven I - IV für $\varphi_r \leq 0$ nicht konsekutiv umschließen, sind die Kurven nicht mehr Linien gleicher Flächenintensität.

Aus der Figur 13 kann dennoch eine brauchbare Flächenintensitätsverteilung in radialer und axialer Richtung entnommen werden, indem die Punkte der Kurven I - IV mit minimalem und maximalem Abstand von der δ^* - Achse für die Verteilung über φ^* bzw. von der φ^* - Achse für die Verteilung über δ^* als Randpunkte benutzt werden. Die Verteilungen werden für die Bereiche mit $\varphi_r \gg 0$ bzw. $\varphi_r \leq 0$ getrennt aufgenommen und nach den entsprechenden Korrekturen addiert. Figur 14 zeigt diese Verteilungen über φ^* , Figur 15 über δ^* . Die Korrekturen sind von der Größenordnung 5 % der Linienhöhe und deshalb für die Halbwertbreiten der Linien ohne Bedeutung.

Diese Intensitätsverteilungen sind aus dem von Kurve IV der Figur 12 umrandeten Raumwinkel von ca. 0,01 % gewonnen. Eine Vergrößerung des Raumwinkels kann wegen der nur noch geringen möglichen Beiträge von weniger als 0,5 % der Maximalintensität an der Linienbreite und Linienhöhe nichts mehr ändern.

Anhand von Rechnungen geringerer Genauigkeit konnte die Abhängigkeit der Auflösung für Punktquellen von ihren Lagekoordinaten ermittelt werden. Hierzu mußte zunächst die Abhängigkeit der Dispersion von den Lagekoordinaten der Quelle berechnet werden. Figur 16 zeigt den unter Verwendung der exakten Bewegungsgleichungen und dem Feld in 10. Ordnung gefundenen Zusammenhang zwischen der Dispersion und den Startkoordinaten $\delta_0 = 0$ bzw. $\varphi_0 = 0$ und $\varphi_0 = \xi_0$. In Figur 17 ist die mit der aus Figur 16 entnommenen Dispersion gewonnene Abhängigkeit der Auflösung von den entsprechenden Startkoordinaten angegeben. Die zugehörigen Linienhalbwertbreiten sind ebenfalls eingezeichnet. Diese Untersuchung wurde auf den Quadranten $\varphi_0 \geq 0$ und $\delta_0 \geq 0$ beschränkt. Die beträchtliche Zunahme der Linienbreiten ist die Konsequenz einer von den in Anfangskoordinaten und Öffnungswinkeln gemischten Abbildungsfehlern abhängigen Fokussierung. Die Maximalintensitäten sind dementsprechend niedriger, so daß ein wesentlich größerer Raumwinkelanteil als etwa 0,01 % von 4π wie im Falle der Punktquelle in $\varphi_0 = \delta_0 = 0$ zu der Linie beiträgt. Im Falle von $\varphi_0 = 0,1$, $\delta_0 = 0,1$ beträgt der Raumwinkelanteil, in dem die Flächenintensitäten mehr als 1 % der maximalen Flächenintensität erreichen, 0,1 % von 4π , d.h. die Auflösung wird für Punktquellen in größerer Entfernung von $\varphi_0 = \delta_0 = 0$ durch den Raumwinkel stark beeinflusst. Diese Rechnungen sind ohne die für den Fall der Punktquelle in $\varphi_0 = \delta_0 = 0$ vorgenommenen Korrekturen durchgeführt worden und stellen deshalb lediglich eine ungenaue Approximation der zu erwartenden Auflösungen dar.

Da der Einsatz von Funkenkammern an Quelle und Detektor beabsichtigt ist, soll anhand der oben beschriebenen Rechnungen eine Abschätzung der zu erwartenden Auflösung gegeben werden. Die Ortsauflösung der Funkenkammern beträgt zur Zeit 0,5 mm ²³, was bei einem Sollkreisradius von $r_0 = 50$ cm einem auf r_0 reduzierten Durchmesser $\Delta = 2 \cdot 10^{-3}$ entspricht. Die Funkenkammer habe eine effektive Fläche von $\varphi_{0\max} = \pm 0,1$ und $\delta_{0\max} = \pm 0,1$. Der Figur 17 entnimmt man, daß für Punktquellen innerhalb dieser Fläche die radialen Halbwertbreiten

$$\Delta \varphi^* \leq 8 \cdot 10^{-4}$$

sind. Die Punktquelle wird von der Quellen-Funkenkammer mit der Genauigkeit Δ registriert, was einer flächenförmigen Quelle des Durchmessers Δ äquivalent ist. Unterstellt man eine ähnliche 1:1 - Abbildung, was

für große Anfangskoordinaten nicht ganz richtig ist, und nimmt man weiterhin Dreiecksverteilungen für die aus Punktquellen erzeugten Intensitätsverteilungen an, so hat die resultierende Intensitätsverteilung eine Halbwertbreite von höchstens

$$\Delta r \leq 2,8 \cdot 10^{-3}.$$

Diese Intensitätsverteilung wird mit der Detektorfunkenkammer gemessen, die ihrerseits wieder eine Ortsauflösung von $\Delta = 2 \cdot 10^{-3}$ hat, d.h. die Fläche des Durchmessers Δ wird überdeckt mit Flächen des Durchmessers Δ . Eine Punktquelle aus der Fläche der Quellenfunkenkammer erzeugt also eine Intensitätsverteilung, deren messbare Halbwertbreite höchstens

$$\Delta r + \Delta \leq 4,8 \cdot 10^{-3}$$

ist. Dies entspricht einer Auflösung von mindestens

$$\Delta p/p \leq 9,9 \cdot 10^{-5}.$$

Bei den bislang angestellten Betrachtungen war die Verwendung von Funkenkammern an Quelle und Detektor unterstellt, also Quellen kleiner Flächen, nämlich Flächen mit dem Durchmesser der Ortsauflösung der Funkenkammer, und Detektoren gleicher Flächen. Deshalb ist bei den bisherigen Betrachtungen die zweidimensionale Intensitätsverteilung, d.h. die Flächenintensität zugrunde gelegt worden.

Wird die von einer Punktquelle ausgehende Intensität mittels eines Spaltes registriert, wie dies in der Beta-Spektroskopie üblich ist, oder mittels einer nur die q^* -Koordinate messenden Funkenkammer, so ist lediglich die Intensitätsverteilung $N(q^*)$ in radialer Richtung wichtig. Die Flächenintensität Gl. (33) muß über die axiale Koordinate integriert werden,

$$N(q^*) = \int_{\delta^*_{\min}}^{\delta^*_{\max}} J(q^*, \delta^*) d\delta^* . \quad (34)$$

Diese Intensitätsverteilung läßt sich numerisch nur unter großem Aufwand sauber berechnen. Zur Vereinfachung wird die Annahme gemacht, daß die Flächenintensität in dem Flächenelement dF konstant sei. Weiterhin wird das Flächenelement dF in ein flächengleiches Rechteck

einer Seitenlänge in radialer Richtung von $q_{\max}^* - q_{\min}^*$ transformiert, wobei $q_{\max}^*$ und $q_{\min}^*$ die in radialer Richtung äußersten Begrenzungspunkte von $d\Gamma$ sind. Mit diesen Vereinfachungen wird die Intensität (32)

$$dI = \int_{q_{\min}^*}^{q_{\max}^*} \int_{\delta_{\min}^*}^{\delta_{\max}^*} J(q^*, \delta^*) dq^* d\delta^*$$

bzw.

$$dI = (q_{\max}^* - q_{\min}^*) \int J(q^*, \delta^*) d\delta^*$$

und damit unter Verwendung von $\Delta q^*(q^*) = q_{\max}^* - q_{\min}^*$

$$N(q^*) = dI / \Delta q^*(q^*)$$

Zur numerischen Berechnung der Verteilung wurden das Feld bis zur 10. Ordnung und die exakten Bewegungsgleichungen verwandt. Die Raumwinkelbereiche wurden analog zu der Methode der Flächenintensitätsberechnung in 100 Raumwinkelelemente unterteilt.

Tabelle 4 gibt den Zusammenhang zwischen Halbwertbreite bzw. Auflösung und dem benützten Raumwinkel bei Registrierung des Bildes einer Punktquelle in $q_0 = \delta_0 = 0$ mit einem Spalt. Zum Vergleich sind die Verteilungen für die rotationssymmetrischen Flachspektrometer mit radialer Weitwinkelfokussierung und mit von φ_t^2 unabhängiger Fokussierung, jedoch mit um $q_0 = 0,2$ radial versetzter Quelle ⁸ berechnet worden. Die starke Abhängigkeit der Auflösung von dem Raumwinkel ist eine Folge der Integration der Flächenintensitätsverteilung über δ^* (34). D.h. bei Registrierung mit einem Spalt oder einer nur die q^* -Koordinate messenden Funkenkammer wird die gesamte in δ^* -Richtung verteilte Intensität gemessen.

Der Vergleich mit den beiden rotationssymmetrischen Flachspektrometern beweist die aufgrund der von φ_r^2 und φ_t^2 unabhängigen Fokussierung (vgl. Abschnitt III,5) vermutbare Überlegenheit des Wendelspektrometers zumindest für Punktquellen mit den Anfangskoordinaten $q_0 = \delta_0 = 0$. Ein Vergleich mit einem entsprechenden AVF-Spektrometer ist zur Zeit noch nicht möglich, da die entsprechenden Daten fehlen.

Von den im Falle des Wendelspektrometers gegenüber dem Flachspektrometer neu hinzugekommenen Aberrationsfehlern zweiter Ordnung sind bei Spektroskopie mit einem Spalt infolge der schmalen Quellen die Aberrationsfehler, die φ_0 enthalten, sehr klein, so daß lediglich der Fehler in φ_0 von Bedeutung bleibt. Der Einfluß der Anfangskoordinate δ_0 auf die Linienhalbwertbreiten der von einer Punktquelle erzeugten Verteilung $N(Q^*)$ ist in Figur 18 für das Wendelspektrometer mit $k = 0,135$ und die beiden oben spezifizierten Flachspektrometer dargestellt. Es zeigt sich, daß die Überlegenheit des Wendelspektrometers gegenüber dem Flachspektrometer mit Weitwinkelfokussierung für $\delta_0 \gg 0,083$ verloren geht, während das Spektrometer mit radial versetzter Quelle mindestens eine um einen Faktor 4 geringere Auflösung hat als das Wendelspektrometer. Der Vergleich mit dem Flachspektrometer mit Weitwinkelfokussierung ist allerdings unrealistisch, da bei der Berechnung der Intensitätsverteilungen der Untergrund, der durch die noch nicht fokussierten Teilchen am Auffänger entsteht, unberücksichtigt blieb. In praxi ist dieses Spektrometer aus früher erläuterten Gründen nicht brauchbar.

9 Charakteristische Daten des Wendelspektrometers

Zahl der Halbschwingungen zwischen Quelle und Auffänger:

radial $n = 1,$

axial $m = 5.$

Steigung der Wendel

$k = 0,135 .$

Fokussierungswinkel

$\vartheta^* = 15,877\ 578 .$

$= 909,72^\circ .$

Koeffizienten der Feldentwicklung

in der Sollfläche:

$a_1 = - 0,903\ 912 ,$

$a_2 = 0,789\ 26 ,$

$a_3 = - 0,674 ,$

$a_4 = 0,638 ,$

$a_5 = - 0,559 .$

Dispersion

1. Näherung $D = 47,18 ,$

exakt für $\Delta p/p = 10^{-3}$

$D = 48,57 .$

Zweidimensionale Intensitätsverteilung
einer Punktquelle in $q_0 = \delta_0 = 0$:

$$\begin{array}{ll} \text{Halbwertbreiten} & \Delta q^* = 2,1 \cdot 10^{-6}, \\ & \Delta \delta^* = 6,15 \cdot 10^{-7}, \\ \text{Raumwinkel} & \omega = 0,01 \% \text{ von } 4\pi, \\ \text{Auflösung} & \Delta p/p = 4,33 \cdot 10^{-8}. \end{array}$$

Intensitätsverteilung über q^* einer
Punktquelle in $q_0 = \delta_0 = 0$:

$$\begin{array}{ll} \text{Halbwertbreite} & \Delta q^* = 1,56 \cdot 10^{-4}, \\ \text{Raumwinkel} & \omega = 0,229 \% \text{ von } 4\pi, \\ \text{Auflösung} & \Delta p/p = 3,2 \cdot 10^{-6}. \end{array}$$

Auflösung mit Funkenkammern einer Orts-
auflösung von 0,5 mm bzw. $\Delta = 2 \cdot 10^{-3}$ bei
einer Kammerfläche an der Quelle von 100 cm²
bzw. $q_{0_{\max}} = \pm 0,1$ und $\delta_{0_{\max}} = \pm 0,1$:

$$\begin{array}{ll} \Delta p/p \leq 9,9 \cdot 10^{-5}, \\ \text{Raumwinkel dazu} & \omega \approx 0,1 \% \text{ von } 4\pi. \end{array}$$

Auflösung mit sehr schmaler Quelle und
Spalt:

$$\begin{array}{ll} \Delta p/p \leq 2,86 \cdot 10^{-5}, \\ \text{Raumwinkel dazu} & \omega = 0,229 \% \text{ von } 4\pi. \end{array}$$

10 Konstruktionsvorschlag

Die Herstellung eines magnetischen Wendelfeldes der in dieser Arbeit geschilderten Form soll mit Eisenpolschuhen erfolgen. Die Polschuhflächen sind als Äquipotentialflächen des skalaren magnetischen Potentials anzusehen und müssen demnach der Gl. (1) genügen. Dies ergibt einen Polschuh, wie er in Figur 19 in einer Aufsicht schematisch dargestellt ist. Der Polschuh ist aus einem Stück, ein Zylinder vom Radius $r < r_0$ in der Achse bleibt massiv. Damit die Voraussetzung, daß die Polschuhe Äquipotentialflächen des skalaren magnetischen Potentials sind, erfüllt werden kann, muß die Permeabilität des Eisens möglichst hoch sein.

Die Erregung des Magneten erfolgt mit einer Wicklung, die den Strom wendelförmig entlang der Achse etwa nach oben (vgl. Figur 18, gestrichelte Linie I) und auf der Außenseite zwischen den Polschuhen (vgl. Figur 18, gestrichelte Linie II) zurückführt. Für die innere Wicklung geht der magnetische Schluß über den massiven axialen Zylinder, für die äußere Wicklung geht er über einen Zylindermantel, der über den gesamten Magneten geschoben wird und in Figur 18 nicht eingezeichnet ist.

Um eine Vorstellung von den Dimensionen eines Wendelspektrometers zu geben, diene das folgende realistische Zahlenbeispiel:

Der Sollbahnradius sei $r_0 = 50$ cm. Bei einer Steigung der Wendel von $k = 0,135$ ist dann die Steighöhe der Sollfläche $h = 42,4$ cm. Die lichte Höhe über der Sollbahn sei insgesamt 15 cm. Die Gesamthöhe des Polschuhes wird dann ca. 1,3 bis 1,5 m. Läßt man für die Bahnen eine radiale Maximalamplitude von $q_{\max} = 0,7$ zu, so wird der Durchmesser des Polschuhes unter Berücksichtigung des Platzes für die rückführende Wicklung ca. 1,8 m bzw. mit dem für den magnetischen Schluß nötigen Eisenzyylinder ca. 2,00 m. Die Erregerwicklung muß bei einem Magnetfeld von $4,6 \text{ k}\Gamma$ auf der Sollbahn, die zur Spektroskopie der aus dem π -Zerfall kommenden Elektronen benötigt werden, ca. $5,6 \cdot 10^{-4}$ Amperewindungen besitzen. Bei einem Spulenquerschnitt von ca. 50 cm^2 ergibt sich eine Stromdichte in der inneren Wicklung von 560 A/cm^2 . Diese hohe Stromdichte läßt sich jedoch herabsetzen, indem für die innere Wicklung eine größere radiale Ausdehnung zugelassen wird. Dies ist möglich, da nach Figur 7 das Feld in der Sollfläche bei $q = -0,54$ bereits doppelt so stark ist wie für $q = 0$. Bei einem Feld von $H = 4,6 \text{ k}\Gamma$ in der Sollbahn würde demnach bei $q = -0,54$ die Feldstärke in der Sollfläche bereits $9,2 \text{ k}\Gamma$ erreicht haben und damit selbst bei sehr gutem Eisen in dem Bereich beginnender Sättigung liegen. Deshalb sind bei hohen Feldstärken große negative radiale Amplituden der Teilchenbahnen zu unterdrücken, womit letztlich Platz für die innere Wicklung gewonnen wird.

Diskussion

Die Rechnungen in nullter und erster Ordnung haben gezeigt, daß Spektrometer vom Typ des Wendelspektrometers geeignet sind, durch Fokussierungswinkel von mehr als 2π hohe Dispersion zu erzielen, ohne dabei auf experimentelle Schwierigkeiten infolge Mehrfachumlaufes zu stoßen. Die exakte Doppelfokussierung in φ_r und φ_z geht zwar verloren, indessen ist der entstehende radiale Aberrationsfehler φ^* in φ_z höchstens von der Größenordnung 10^{-8} . Die Rechnungen zweiter Ordnung sind für ein Spektrometer mit $n = 1$ und $m = 5$ durchgeführt und haben gezeigt, daß die Fokussierung durch geeignete Vorgabe von a_2 von φ_r^2 unabhängig wird. Durch den Wendelcharakter des Feldes entstehen allerdings Abbildungsfehler in $\varphi_r\varphi_z$, $\varphi_r\delta_o$, $\varphi_r\delta_o$ und $\varphi_z\delta_o$, die bei dem entsprechenden rotationssymmetrischen Flachspektrometer Null sind. Durch passende Wahl der Steigung der Wendel zu $k = 0,135$ kann jedoch der Fehler in φ_z^2 zum Verschwinden gebracht werden. Der Fehler in δ_o^2 geht damit gleichzeitig auf ca. $1/7$ seines Wertes für $k = 0$ zurück. Da in praxi der Emissionswinkel φ_z groß gemacht werden kann, ohne die Amplitude der Teilchenbahn zu sehr anwachsen zu lassen, fällt damit ein erheblicher Fehlerbeitrag weg. Die Überlegenheit des Wendelspektrometers gegenüber dem entsprechenden rotationssymmetrischen Flachspektrometer und dem entsprechenden AVF-Flachspektrometer zeigt sich in einer Abschätzung der Auflösung in einer zweiten Näherung (Tabelle 2).

Die Rechnungen in dritter und vierter Ordnung dienten dazu, die Abbildung durch geeignete Wahl von a_3 bzw. a_4 von φ_r^3 bzw. φ_r^4 unabhängig zu machen. Der Feldkoeffizient a_5 wurde willkürlich gewählt.

Anhand von Rechnungen mit den exakten Bewegungsgleichungen und dem Magnetfeld bis zur 10. Ordnung ist die Flächenintensitätsverteilung einer Punktquelle mit den Koordinaten $\varphi_o = \delta_o = 0$ am Auffänger berechnet worden. Es zeigte sich, daß nur ein Raumwinkelanteil von 0,01 % zu der Linie beiträgt, während der Rest wegen der geringen Beiträge von ca. 0,5 % der Maximalintensität an der Linienbreite und -höhe nichts mehr zu ändern vermag. Für Punktquellen außerhalb von $\varphi_o = \delta_o = 0$ ist der effektive Raumwinkel etwa 0,1 %. Die Linienbreite nimmt mit dem Abstand der Quelle von $\varphi_o = \delta_o = 0$ erheblich zu

(vgl. Figur 17) und ist für $\varphi_0 = \delta_0 = 0,1$ um zwei Größenordnungen größer als für $\varphi_0 = \delta_0 = 0$.

Endlich wurde eine Abschätzung der Auflösung bei Verwendung von Funkenkammern der Fläche $2\varphi_{0\text{max}} = 0,2$, $2\delta_{0\text{max}} = 0,2$ und einer Ortsauflösung von 0,5 mm bzw. von $2 \cdot 10^{-3}$ vorgenommen. Demnach ist die Auflösung bei einem Raumwinkel von 0,1 % besser als $\Delta p/p \leq 9,9 \cdot 10^{-5}$.

Zur Überprüfung der Verwendbarkeit des Wendelspektrometers als Beta-Spektrometer mit schmaler Quelle und Registrierung mittels eines Spaltes sind die über die axiale Bildkoordinate δ^* integrierten Intensitätsverteilungen einer Punktquelle in $\varphi_0 = 0$ und verschiedenen δ_0 berechnet worden. Es zeigt sich, daß die Auflösung in diesem Falle stark von dem Raumwinkel abhängt (Tabelle 4) und mit zunehmenden δ_0 zurückgeht (Figur 18). Zum Vergleich sind die entsprechenden Verteilungen der rotationssymmetrischen Flachspektrometer mit Weitwinkelfokussierung sowie mit radial versetzter Quelle und von φ_z^2 unabhängiger Fokussierung berechnet worden. Dieser Vergleich bestätigt die Überlegenheit der Fokussierung durch das Wendelfeld mit $k = 0,135$.

Eine Verbesserung bzw. eine Anpassung der Fokussierung an die experimentellen Erfordernisse ist durch Einführung eines azimuthal veränderlichen Magnetfeldes möglich. Im Falle des Flachspektrometers kann durch passende Gestaltung des Magnetfeldes jeder Aberrationsfehler zweiter und höherer Ordnung beseitigt werden²². Die Anwendung dieses Prinzips auf das Wendelspektrometer läßt eine Beseitigung der in Öffnungswinkeln und Anfangskoordinaten gemischten Abbildungsfehler und damit eine über eine großflächige Funkenkammer gute Auflösung erhoffen. Ebenso kann man aus einer azimuthalen Feldvariation solcher Art, daß in Quellen- und Auffängernähe eine starke Fokussierung in radialer und axialer Richtung erfolgt und dazwischen der Strahlverlauf quasi "parallel" zur Sollbahn ist, eine Vergrößerung des effektiven Raumwinkels erhoffen.

Die Genauigkeit und Schnelligkeit moderner elektronischer Rechanlagen legte eine numerische Behandlung der höheren Näherungen für das Wendelspektrometer nahe. Die Ergebnisse der ersten Näherung sind

ebenfalls auf numerischem Wege überprüft worden. Die Rechnungen wurden an der GIER-Rechenanlage des hiesigen Instituts, an der IBM-7090 des Deutschen Rechenzentrums, Darmstadt und an den Maschinen CDC 3400 und CDC 6600 des CERN durchgeführt.

Für ein bei dem Neutretto -Vorexperiment Verwendung findenden Sektorfeldmagneten wurde eine günstige Einstellung berechnet. Bei einer Gesamtablenkung von 90° wird ein radialer Abbildungsmaßstab von $\mathcal{M}_r = -1$ und ein axialer Abbildungsmaßstab von $\mathcal{M}_a = -4$ gewählt. Mit den vorhandenen Funkenkammern und einem realisierbaren Target kann eine Auflösung von $\Delta p/p \approx 9,2 \cdot 10^{-3}$ erreicht und damit der Impuls mit einer Genauigkeit von $\Delta p/p \leq 10^{-3}$ gemessen werden. Dabei ist ein Raumwinkel von $\omega = 0,33\%$ von 4π nutzbar.

Herrn Professor Dr. W. Gentner bin ich zu großem Dank verpflichtet für sein Interesse am Fortgang dieser Arbeit und dafür, daß ich an seinem Institut unter denkbar günstigen Bedingungen arbeiten konnte.

Besonderen Dank schulde ich Herrn Priv. Doz. Dr. H. Daniel für die Aufgabenstellung, für lehrreiche und viel von seiner umfassenden Erfahrung vermittelnde Diskussionen und Ratschläge und nicht zuletzt für sein ständig förderndes Interesse an dieser Arbeit.

Herrn Dipl. Phys. F. Schmutzler danke ich für viele anregende Diskussionen, wertvolle und unerläßliche Rechenkontrollen und die Überlassung der Fortran-Subroutine SEARCHZW.

ANHANG

Mathematischer Anhang

Die Entwicklung des Quotienten in Abschn.III,2, Gl.(4) besitzt die Koeffizienten

$$B_{2j} = \frac{(-1)^j}{(1+k^2)^{2j+1}} \sum_{i=0}^j (-1)^i \binom{2j+1}{2i+1} k^{2(j-i)}, \quad j = 1, 2, \dots, \infty,$$

$$B_{2j-1} = \frac{(-1)^{j+1}}{(1+k^2)^{2j}} \sum_{i=0}^j (-1)^i \binom{2j}{2i} k^{2(j-i)}, \quad j = 1, 2, \dots, \infty. \quad (A1)$$

Die bei der Entwicklung der Bewegungsgleichungen Abschn.III,3, Gln.(7) bis zur 4. Ordnung auftretenden Summanden der entsprechenden Ordnung sind:

$$\begin{aligned} g_1 &= q + 2\dot{\phi} - \frac{1}{1+k^2} \{q + \dot{\phi} + k(\ddot{\xi} - kq)\} - h_{z1}, \\ g_2 &= 2q\dot{\phi} + \dot{\phi}^2 - \frac{1}{1+k^2} \{ (q\dot{\phi} - kq(\ddot{\xi} - kq)) + (q + \dot{\phi} + k(\ddot{\xi} - kq)) h_{z1} \} - h_{z2}, \\ g_3 &= q\dot{\phi}^2 - \frac{k}{1+k^2} q^2(\ddot{\xi} - kq) - \frac{1}{1+k^2} \{ (q\dot{\phi} - kq(\ddot{\xi} - kq)) h_{z1} + (q + \dot{\phi} + k(\ddot{\xi} - kq)) h_{z2} \} - h_{z3}, \\ g_4 &= \frac{k}{1+k^2} \{ q^3(\ddot{\xi} - kq) - q^2(\ddot{\xi} - kq) h_{z1} \} - \frac{1}{1+k^2} \{ (q\dot{\phi} - kq(\ddot{\xi} - kq)) h_{z2} + (q + \dot{\phi} + k(\ddot{\xi} - kq)) h_{z3} \} - h_{z4}, \\ \phi_1 &= -2\ddot{q} + \frac{1}{1+k^2} \ddot{q} - \frac{k}{1+k^2} h_{r1}, \\ \phi_2 &= -q(-2\ddot{q} + \frac{1}{1+k^2} \ddot{q} - \frac{k}{1+k^2} h_{r1}) + \{-2\dot{q}\dot{\phi} + \frac{1}{1+k^2} (\dot{q} h_{z1} - k h_{r2} - \ddot{\xi} h_{r1})\}, \\ \phi_3 &= q^2(-2\ddot{q} + \frac{1}{1+k^2} \ddot{q} - \frac{k}{1+k^2} h_{r1}) - q \{-2\dot{q}\dot{\phi} + \frac{1}{1+k^2} (\dot{q} h_{z1} - k h_{r2} - \ddot{\xi} h_{r1})\} + \frac{1}{1+k^2} (\dot{q} h_{z2} - k h_{r3} - \ddot{\xi} h_{r2}), \\ \phi_4 &= q^3(-2\ddot{q} + \frac{1}{1+k^2} \ddot{q} - \frac{k}{1+k^2} h_{r1}) + q^2 \{-2\dot{q}\dot{\phi} + \frac{1}{1+k^2} (\dot{q} h_{z1} - k h_{r2} - \ddot{\xi} h_{r1})\} + \frac{1}{1+k^2} (\dot{q} h_{z3} - q\dot{q} h_{z2} - k h_{r4} - (\ddot{\xi} - kq) h_{r3} - q\ddot{\xi} h_{r2}), \\ \xi_1 &= \frac{k}{1+k^2} \ddot{q} + \frac{1}{1+k^2} h_{r1}, \\ \xi_2 &= \frac{1}{1+k^2} \{ k(\dot{q} h_{z1} - q\ddot{q}) + (q + \dot{\phi}) h_{r1} + h_{r2} \}, \\ \xi_3 &= \frac{1}{1+k^2} \{ k(\dot{q} h_{z2} - q\dot{q} h_{z1} + \dot{q} q^2) + q\dot{\phi} h_{r1} + (q + \dot{\phi}) h_{r2} + h_{r3} \}, \\ \xi_4 &= \frac{1}{1+k^2} \{ k(\dot{q} h_{z3} - q\dot{q} h_{z2} + \dot{q} q^2 h_{z1} - \dot{q} q^3) + q\dot{\phi} h_{r2} + (q + \dot{\phi}) h_{r3} + h_{r4} \}. \end{aligned} \quad (A2)$$

Hierbei ist $\omega=1$ gesetzt. Die h_{rv} und h_{zv} ($v=1,2,3,4$) sind Abkürzungen für die Anteile der Feldkomponenten Abschn.III,2, Gln.(3) in v -ter Ordnung.

Die Anfangswerte, Abschn.III,3, Gln(13), werden für $\eta=1$ bis zur 2. Ordnung allgemein und bis zur 4. Ordnung in k entwickelt:

$$\begin{aligned}\dot{Q}_0 &= \sqrt{1+k^2} \left\{ \varphi_r - \frac{1}{6} \varphi_r^3 \right\}, \\ \dot{\Phi}_0 &= - (Q_0 + k\sqrt{1+k^2} \varphi_r) + Q_0 (Q_0 + k\sqrt{1+k^2} \varphi_r) - \frac{1}{2} (1+k^2) (\varphi_r^2 + (1+k^2) \varphi_r^2) + \frac{1}{24} \varphi_r^4, \\ \dot{S}_0 &= \sqrt{1+k^2} \varphi_r. \end{aligned} \quad (A3)$$

Die Konstanten der Gln.(19) aus Abschn.III,4 sind:

$$\begin{aligned}K_{41} &= - \frac{\omega_0^2 S_1^2 q_{31} q_{15} + q_{36} (q_{12} + \omega_0^2 S_1^2)}{\omega_0 S_1 q_{15} (q_{34} + \omega_0^2 S_1^2)}, \\ K_{61} &= \frac{q_{12} + \omega_0^2 S_1^2}{\omega_0 S_1 q_{15}}, \\ K_{22} &= - \frac{\omega_0 S_2 q_{15}}{q_{12} + \omega_0^2 S_2^2}, \\ K_{42} &= - \frac{\omega_0^2 S_2^2 q_{31} q_{15} + q_{36} (q_{12} + \omega_0^2 S_1^2)}{(q_{34} + \omega_0^2 S_2^2) (q_{12} + \omega_0^2 S_1^2)}. \end{aligned} \quad (A4)$$

Die sind die Koeffizienten der Matrix des Differentialgleichungssystems Abschn.III,4, Gln.(16) in seiner sechsdimensionalen Form:

$$\begin{aligned}q_{12} &= -\omega_0^2 (a_1 + 1/(1+k^2)), \\ q_{15} &= -2\omega_0 k, \\ q_{31} &= -\omega_0 (1+2k^2)/(1+k^2), \\ q_{34} &= a_1 \omega_0^2 k^2/(1+k^2), \\ q_{36} &= -a_1 \omega_0^2 k/(1+k^2), \\ q_{51} &= \omega_0 k/(1+k^2), \\ q_{54} &= q_{36}, \\ q_{56} &= \omega_0^2 a_1/(1+k^2)\end{aligned}$$

Die Konstanten der Gln.(21) aus Abschn.III,4 sind:

$$\begin{aligned}a &= -q_{15}/q_{12}, \\ A &= 1 + a\omega_0 S_1 K_{61}, \\ B &= K_{22} - a\omega_0 S_2, \\ C &= K_{61} - k K_{41}, \\ E &= 1 + k K_{42}, \\ D_0 &= \omega_0^2 S_1 S_2 (AE^2 + K_{22} BC^2) + \omega_0^2 S_1^2 K_{22} AEC + \omega_0^2 S_1^2 BEC, \\ Q_{36} &= \omega_0 (S_1 E + S_2 K_{22} C)/D_0, \\ Q_{45} &= \omega_0 (S_1 BC + S_2 AE)/D_0. \end{aligned} \quad (A5)$$

Experimenteller Anhang

Messungen am μ -Kanal des Synchrozyklotrons des CERN

Zur Bestimmung der Pionenstrahlintensität am Müonenkanal des Synchrozyklotrons vom CERN wurden Messungen durchgeführt. Die Geometrie der Anordnung ist in Figur 20 dargestellt. Der Protonenstrahl des Synchrozyklotrons wird in einem internen Target gestoppt, dessen Position durch einen azimutalen Winkel φ und den Radius r definiert ist. Die dabei entstehenden π -Mesonen werden im Zyklotronfeld und durch einen zusätzlichen Magneten MMEC nach außen geführt und in die beiden Quadrupollinsen LC3 und LC4 und anschließend in den μ -Kanal gelenkt. In dem Monochrometermagneten wird der Pionenstrahl nach dem Impuls mit maximaler Intensität separiert und in den folgenden Quadrupollinsen LB26-LB29 auf den Zähler 3 fokussiert.

In dem Absorber A werden die Pionen auf eine niedrige Energie abgebremst und im Target T gestoppt. Die abgebremsten Pionen werden durch Koinzidenz der Zähler 1, 2 und 3, die im Target gestoppten Teilchen durch Antikoinzidenz des Zählers 4 zu der Koinzidenz 1, 2, 3 nachgewiesen. Bei den Messungen zur Fokussierung des Pionenstrahles wurden ohne Absorber lediglich Koinzidenzen der Zähler 1, 2 und 3 gemessen. Die Messungen wurden für die Fälle gemacht, daß der μ -Kanal eine ungerade Anzahl von Quadrupolen oder eine gerade Anzahl von Quadrupolen besaß.

Intensität

Die Intensität der in die Quadrupollinsen LC3, LC4 und in den μ -Kanal einfallenden Teilchen hängt unter anderem von der Position φ und r des internen Targets und von der Feldstärke des MMEC-Magneten ab.

Der Impuls des Pionenstrahls, d.h. der Strom des MD1-Magneten bei maximaler Zählrate ändert sich mit r , φ und der MMEC-Feldstärke. Für feste Targetposition gibt es genau eine MMEC-Einstellung, bei der die Pionenintensität ein Maximum erreicht. Diese Einstellung wurde

ermittelt, indem für verschiedene MMEC-Ströme die Zählratenmaxima bei Durchfahren des MD1-Magneten bestimmt wurden. Der Intensitätsgewinn durch den MMEC-Magneten beträgt zwischen den Winkeln $\vartheta = 35^\circ$ und $\vartheta = 33^\circ$ einen Faktor 1,5 bis 2 verglichen mit den Intensitäten ohne MMEC-Strom. Figur 21 zeigt die MMEC- und die entsprechenden MD1-Einstellungen für maximale Intensität als Funktion der internen Targetposition r und ϑ .

Fokussierung

Die Fokussierung durch den μ -Kanal, die Quadrupollinsen LC3 und LC4 sowie die Quadrupollinsen LB26, LB27, LB28, LB29 erhöht die Intensität gegenüber fehlender Fokussierung um die folgenden Faktoren:

- a) ungerade Anzahl von Quadrupollinsen im μ -Kanal
(Figur 22a):

beste μ -Kanal-Fokussierung	16 ,
zusätzliche Fokussierung durch LC3, LC4	1,7 bis 2 ,
" " " " " LB26-LB29	4,8 bis 5 .

- b) gerade Anzahl von Quadrupollinsen im μ -Kanal
(Figur 22b):

beste μ -Kanal-Fokussierung	18 ,
zusätzliche Fokussierung durch LC3, LC4	2,5 ,
" " " " " LB26-LB29	5,5 .

Stoppraten

Für verschiedene Stellungen des internen Targets sind Reichweite-Kurven gemessen worden (Figuren 23a,b,c,d). Die Magnete MMEC und MD1 waren gemäß den in Figur 21 gefundenen Werten eingestellt. Absorber und Target bestanden aus Kupfer, die Targetdicke war 5 mm. Aus diesen Reichweite-Kurven kann die Abhängigkeit der Stopprate von der Stellung des internen Targets abgelesen werden (Abb. 24). Die maximale Pionen-

stopprate wird offenbar bei einem Targetwinkel $\theta = 35,5^\circ$ und einem Radius von 222 mm erreicht. Die Tabelle 5 gibt eine Zusammenstellung der ermittelten Einstellungen und der dabei erzielten Intensitäten.

Literatur

- (1) H. Daniel und G. Poelz, Max-Planck-Institut für Kernphysik, Heidelberg, Bericht 1965/V/1.
- (2) H. Daniel, G. Poelz, Nuovo Cimento 34, 784 (1964).
- (3) M. Bardon, P. Norton, J. Peoples, A.M. Sachs and J. Lee-Franzini, Phys.Rev.Letters 22, 449 (1965).
- (4) V.L. Telegdi, Kolloquium über β -Zerfall und schwache Wechselwirkungen, Heidelberg, 1965/Diskussionsbeitrag.
- (5) H. Daniel, Rev.Sci.Instr. 31, 249 (1960).
- (6) H. Daniel, P. Jahn, M. Kuntze and G. Spannagel, Nucl.Instr. and Meth. 35, 171 (1965).
- (7) G.E. Lee-Whiting, Can.J.Phys. 35, 570 (1957).
- (8) H. Daniel and L. Laslett, Rev.Sci.Instr. 31, 1225 (1960).
- (9) K. Siegbahn, Alpha-Beta- and Gamma-Ray Spectroscopy (North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1965).
- (10) R. Herzog, Z.f.Physik 89, 447 (1934).
- (11) H. Hintenberger, Z.f. Naturforschung 3a, 125 (1948).
- (12) M. Cotte, Ann.phys. 10, 333 (1938).
- (13) S. Penner, Rev.Sci. Instr. 32, 150 (1961).
- (14) E. Kamke, Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen (Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1959) Bd. 1.
- (15) G. Kaschl, persönliche Mitteilung.
- (16) W. Haack, Elementare Differentialgeometrie (Birkhäuser-Verlag, Basel u. Stuttgart, 1955) p.55.
- (17) G. Lehr, Marb. Sitzungsber. 78, 47 (1955).
- (18) G. Poelz, persönliche Mitteilung.
- (19) W.W. Stepanow, Lehrbuch d. Differentialgleichungen (VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956).
- (21) L. Collatz, The Numerical Treatment of Differential Equations (Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1960).
- (22) F. Schmutzler, Diplomarbeit, Heidelberg, 1965.
- (23) K. Springer, persönliche Mitteilung.

Tabellen und Zeichnungen

Tabelle 1a

Abhängigkeit der für die Abbildung durch ein Sektormagnetfeld wichtigen Größen sowie der Dispersion D und des Raumwinkels ω von dem axialen Abbildungsmaßstab $\mathcal{M}_r$. l_1, L_2, f und F sind in Einheiten des Sollkreisradius, ω ist in % von 4π angegeben. $\mathcal{M}_r = -1$, $l_2 = 2$.

$\mathcal{M}_r$	$\text{tg}\varepsilon_1$	$\text{tg}\varepsilon_2$	l_1	L_2	f	F	D	ω
-0,5	0,390	0,781	2,562	1,292	1,438	1,457	4,561	-
-1,0	0,500	0,500	2,000	2,000	1,250	1,647	4,000	-
-1,5	0,569	0,379	1,758	2,638	1,275	1,642	3,758	0,20
-2,0	0,618	0,309	1,618	3,236	1,236	1,595	3,618	0,23
-4,0	0,732	0,138	1,366	5,463	1,155	1,419	3,366	0,33
-8,0	0,828	0,104	1,207	-	-	-	3,207	-

Tabelle 1b

Lichtstärke L für verschiedene axiale Abbildungsmaßstäbe $\mathcal{M}_r$ bei Abbildung durch ein Sektormagnetfeld. Die Quellenbreite ist $2r_0 = 0,1$, die Quellenhöhe ist $2z_0 = 0,09$ in Einheiten des Sollkreisradius. $\mathcal{M}_r = -1$, $l_2 = 2$.

$\mathcal{M}_r$	-2	-3	-4
L	$2,0 \cdot 10^{-6}$	$2,6 \cdot 10^{-6}$	$3,3 \cdot 10^{-6}$

Tabelle 2

Radiale Abbildungsfehler 2. Ordnung für Wendelspektrometer mit 5 axialen und einer radialen Halbschwingung zwischen Quelle und Auffänger. Zum Vergleich sind außerdem die Abbildungsfehler 2. Ordnung eines Flachspektrometers mit azimuthal veränderlichem zweitem Feldkoeffizienten $a_2 = 0,93274 - 0,12587 \sin 2\varphi$ (AVF) angegeben.

	AVF	$k=0,000$	$k=0,100$	$k=0,135$
$R_{\varphi_r^2}$	0	0	0	0
$R_{\varphi_z^2}$	0	-0,525	-0,247	0,005
$R_{\varphi_0^2}$	0,460	0,500	0,514	0,501
$R_{\delta_0^2}$	-1,208	-0,995	-0,474	-0,145
$R_{\varphi_r \varphi_z}$	0	0	0,335	0,321
$R_{\varphi_r \varphi_0}$	-0,113	0	-0,284	-0,813
$R_{\varphi_r \delta_0}$	0	0	1,178	1,320
$R_{\varphi_z \varphi_0}$	0	0	0,592	-0,735
$R_{\varphi_z \delta_0}$	2,830	0	0	0
$R_{\varphi_0 \delta_0}$	0	0	0	0

Tabelle 3

Auflösung $\Delta p/p$ zweiter Näherung unter Annahme einer dreieckförmigen Auflösekurve für Spektrometer mit einer radialen und fünf axialen Halbschwingungen zwischen Quelle und Auffänger. Die Fokussierung ist von φ_r^2 unabhängig. Für das Wendelspektrometer und das AVF-Spektrometer ist sie zusätzlich von φ_z^2 unabhängig. Die Quellenbreite ist $2\lambda = 10^{-2}$, die Quellenhöhe ist $2\mu = 10^{-1}$. Die maximalen Öffnungswinkel sind $\varphi_{r\max} = \pm 0,055$ und $\varphi_{z\max} = \pm 0,24$, was einem Raumwinkel von $\omega = 0,42\%$ von 4π entspricht.

k	a ₁	a ₂	$\Delta p/p$
0,135	-0,904	0,789	$3,1 \cdot 10^{-4}$
0	-0,962	0,933	$4,1 \cdot 10^{-4}$
0	-0,962	$0,933 - 0,126 \sin 2\vartheta$	$7,8 \cdot 10^{-4}$

Tabelle 4

Abhängigkeit der Halbwertbreite ΔQ^* der radialen, über δ^* integrierten Intensitätsverteilung bzw. der Auflösung $\Delta p/p$ von dem Raumwinkel ω für eine Punktquelle in $Q_0 = \delta_0 = 0$. ω wird in % von 4π angegeben.

- Wendelspektrometer mit $k = 0,135$ und radialer Weitwinkelfokussierung 5. Ordnung.
- Entsprechendes rotationssymmetrisches Flachspektrometer mit radialer Weitwinkelfokussierung 5. Ordnung.
- Entsprechendes rotationssymmetrisches Flachspektrometer mit radial versetzter Quelle ($Q_0 = 0,2$) und von φ_z^2 unabhängiger Fokussierung.

	$ \varphi_r $	$ \varphi_z $	ω	ΔQ^*	$\Delta p/p$
a)	$\leq 0,06$	$\leq 0,12$	0,229	$1,543 \cdot 10^{-4}$	$3,18 \cdot 10^{-6}$
k=0,135	$\leq 0,04$	$\leq 0,08$	0,102	$4,400 \cdot 10^{-5}$	$9,05 \cdot 10^{-7}$
	$\leq 0,02$	$\leq 0,04$	0,025	$9,900 \cdot 10^{-6}$	$2,04 \cdot 10^{-7}$
b)	$\leq 0,06$	$\leq 0,12$	0,229	$2,275 \cdot 10^{-3}$	$4,38 \cdot 10^{-5}$
k=0,000	$\leq 0,04$	$\leq 0,08$	0,102	$9,253 \cdot 10^{-4}$	$1,78 \cdot 10^{-5}$
	$\leq 0,02$	$\leq 0,04$	0,025	$1,442 \cdot 10^{-4}$	$2,77 \cdot 10^{-6}$
c)	$\leq 0,03$	$\leq 0,24$	0,229	$4,399 \cdot 10^{-3}$	$8,46 \cdot 10^{-5}$
k=0,000	$\leq 0,02$	$\leq 0,16$	0,102	$9,084 \cdot 10^{-4}$	$1,75 \cdot 10^{-5}$
=0,2	$\leq 0,01$	$\leq 0,08$	0,025	$2,451 \cdot 10^{-4}$	$4,71 \cdot 10^{-6}$

Tabelle 5

Die Tabelle zeigt für verschiedene Targetwinkel ϑ und Targetradien R die maximale π -Stopp-rate in einem Cu-Target von 5 mm Dicke und einer Fläche von $10 \times 10 \text{ cm}^2$, das Verhältnis π/μ von maximaler π - zu maximaler μ -Stopp-rate, die Halbwertsbreite $w(\pi)$ der Reichweitekurven für π -Mesonen, die Einstellungen der Magnete MMEC und MD1, des μ -Kanals und der Quadrupollinsen LC3, LC4, LB26 - LB29. "Gerade" und "ungerade" bezieht sich auf die Anzahl der Quadrupole im μ -Kanal.

Internes Target R [cm]	Max. π -Stopp ϑ [°] [kc/sec]	π/μ	$w(\pi)$ [gr/cm ²]	MMEC [A]	MD1 [A]	μ -Kanal		LC3 [hpot]	LC4 [hpot]	LB26 [hpot]	LB27 [hpot]	LB28 [hpot]	LB29 [hpot]	
						[A]	[hpot]							
ungerade	221	35	98	1,37	1,1	132↑	550↑	414↓	490↑	160↑	90↑	470↑	705↑	480↑
	222	33	98	1,76	0,8	225↑	490↑	376↓	300↑	138↑	152↑	512↓	710↑	493↑
		35	125	1,80	0,9	145↑	530↑	396↓	468↑	133↑	152↑	512↓	710↑	493↑
		36	110	1,60	1,05	100↑	570↑	420↑	663↑	225↓	152↑	512↓	710↑	493↑
		37	82	1,31	1,2	50↑	605↑	430↑	475↑	100↑	0	500↑	820↑	640↑
	39	725	-	1,5	50↓	692↑	480↑	500↑	100↑	0	500↑	820↑	640↑	
224	33	93	1,66	0,85	199↑	480↑	370↑	420↑	150↑	30↑	635↑	720↑	670↑	
	35	100	1,67	0,9	125↑	520↑	396↓	550↑	240↑	60↑	690↑	790↑	720↑	
	37	83	1,44	1,1	25↑	592↑	440↓	600↑	150↑	0	640↑	820↑	640↑	
	39	77	1,4	1,4	75↓	670↑	462↓	560↑	170↑	0	500↑	820↑	640↑	
	222	35	127	-	0,9	166↑	535↑	476↑	699↑	850↑	30↑	480↑	707↑	526↑
Gerade	355	132	-	-	1,1	123↑	558↑	494↑	757↑	920↑	100↑	464↑	710↑	541↑
	36	129	-	-	1,0	100↑	570↑	502↑	731↑	888↑	100↑	460↑	700↑	536↑

Figur 1. Schema der bei dem Neutretto-Vorexperiment geplanten Anordnung. Die Pionen werden in einem Absorber A abgebremst. In einer Funkenkammer bzw. in einem aus verschiedenen Streifen zusammengesetzten Szintillators wird ihre radiale Ortskoordinate gemessen. Der Zerfall $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu$ bzw. $\pi^+ \rightarrow e^+ \nu$ findet in einer der Szintillationsfolien des Targets T statt, so daß auf den Energieverlust der μ^+ bzw. e^+ in den folgenden Folien korrigiert werden kann. Die Müonen bzw. Elektronen passieren dann ein Magnetfeld und die Funkenkammern FK1 und FK2.

Figur 2. Zu den Abbildungsgleichungen einer dicken Linse.

x_1, x_2	Sollbahn außerhalb des Feldes.
y_1, y_2	Orthogonale dazu an der Polschuh Eintritts- bzw. Polschuhaustrittskante.
l_1, l_2	Abstand des Gegenstandes bzw. Bildes von der Polschuh Eintritts- bzw. Polschuhaustrittskante.
F_1, F_2	Gegenstands- bzw. bildseitiger Brennpunkt.
g_1, g_2	Abstand der Brennpunkte von den zugehörigen Polschuhkanten.
h_1, h_2	Abstand der Hauptebenen von den zugehörigen Polschuhkanten.
f	Brennweite.

Figur 3. Zur Abbildung durch ein Sektormagnetfeld.

x_1, x_2, y_1, y_2	entsprechend Figur 2.
$\varepsilon_1, \varepsilon_2$	Winkel zwischen Sollbahn und den Normalen zu den effektiven Polschuhkanten.
90°	Gesamtablenkwinkel.

Figur 4. Skizze zur Erläuterung des Einflusses der axialen Koordinate z_0 eines Punktes der Quelle auf die Transmission bzw. den gesamten axialen Öffnungswinkel $\Delta\varphi_z = \varphi_z^+ + \varphi_z^-$ an der Quelle bzw. die axialen Öffnungswinkel φ_z^+ und φ_z^- am Auffänger.

Figur 5. Abhängigkeit des gesamten ausnutzbaren axialen Öffnungswinkels $\Delta\varphi_z$ (vgl. Figur 4) von der axialen Koordinate z_0 eines Punktes der Quelle bei verschiedenen axialen Vergrößerungen γ_v für die Abbildung durch ein Sektormagnetfeld.

Figur 6. Sollbahn im Wendelspektrometer. Der Radius der Sollbahn ist r_0 . Die Steighöhe bei einem Umlauf ist h . Die Steigung der Sollbahn ist $k = \tan\theta = h/2\pi r_0$. Der Punkt $(0,0,0)$, in dem sich das Sollteilchen zur Zeit t befindet, hat die Zylinderkoordinaten $r = r_0$, $\vartheta = \omega_0 t$, $z = k r_0 \omega_0 t$ und die reduzierten Koordinaten $\xi = 0, \phi = 0, \zeta = 0$. Ein beliebiger Punkt hat die reduzierten Koordinaten ξ, ϕ, ζ .

Figur 7. Auf 1 normierte Feldstärke in der Sollbahn von Wendelspektrometern mit einer radialen und fünf axialen Halbschwingungen zwischen Quelle und Auffänger für $k = 0,135$ und $k = 0$ (Flachspektrometer). Die Feldkoeffizienten sind für

$$k = 0,135 \quad \begin{aligned} a_1 &= -0,903912, \\ a_2 &= 0,78926, \\ a_3 &= -0,674, \\ a_4 &= 0,638, \\ a_5 &= -0,559, \end{aligned}$$

$$\text{und für } k = 0 \quad \begin{aligned} a_1 &= -0,961538, \\ a_2 &= 0,932692, \\ a_3 &= -0,916040, \\ a_4 &= 0,909532, \\ a_5 &= -0,8723. \end{aligned}$$

Figur 8. Dispersion D aus der ersten Näherung als Funktion der Steigung k der Wendel.

Figur 9. Radiale Abbildungsfehler zweiter Ordnung in Abhängigkeit von dem Feldkoeffizienten a_2 für ein Wendelfeld der Steigung $k = 0,135$; $a_1 = -0,903\ 912$.

Figur 10. Radiale Abbildungsfehler R_{φ_r} ν -ter Ordnung in dem radialen Öffnungswinkel φ_r als Funktion der Feldkoeffizienten a_ν für ein Wendelspektrometer mit $k = 0,1$ (ausgezogen) und mit $k = 0,135$ (gestrichelt). Die Kurven $\nu=n$ sind mit Feldkoeffizienten $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1$ gerechnet, für die $R_{\varphi_r^{n-1}} = R_{\varphi_r^{n-2}} = \dots = R_{\varphi_r} = 0$ ist.

Figur 11. Zur Bestimmung der Feldkoeffizienten $a = a_2, a_3, a_4, a_5$. Theoretische (durchgezogen) und numerisch berechnete Werte (gestrichelt) für $k = 0, k = 0,1$ und $k = 0,135$. Der Wert a_5 für $k = 0,135$ ist willkürlich gewählt.

Figur 12. Öffnungswinkel φ_r und φ_z , für die die Flächenintensitäten gleich sind, die bei Abbildung einer Punktquelle durch ein Raumwinkelement $[\varphi_r - \Delta\varphi_r, \varphi_r + \Delta\varphi_r], [\varphi_z - \Delta\varphi_z, \varphi_z + \Delta\varphi_z]$ am Auffänger hervorgerufen werden. Die Kurven III, IV, V, VI sind mit $\Delta\varphi_r = 0,002$ und $\Delta\varphi_z = 0,006$ gerechnet, die Kurven I und II mit $\Delta\varphi_r = 0,001$ und $\Delta\varphi_z = 0,003$. Zugrunde gelegt ist eine isotrop strahlende Punktquelle in $\varphi_0 = \delta_0 = 0$. Die gesamte in den Raumwinkel 4π emittierte Intensität I_0 ist auf Eins normiert ($I_0 = 1$). Die Abbildung erfolgte in einem Wendelfeld der Steigung $k = 0,135$ mit radialer Weitwinkelfokussierung 5.Ordnung.

Figur 13. Bei der Abbildung einer Punktquelle in $\varphi_0 = \delta_0 = 0$ durch Teilchen, deren Öffnungswinkel durch die Kurven I - IV der Figur 12 gegeben sind, entstehende Bildkurven. Die Bildkurve für die Linie $\varphi_r = 0,1$ ist durch die Kurve (---) dargestellt. Die Bildkurven für $\varphi_r > 0$ sind durchgezogen, diejenigen für $\varphi_r < 0$ gestrichelt eingezeichnet. Der Ursprung ist korrigiert auf $q^*(\varphi_r = 0, \varphi_z = 0) = 0$.

Figur 14. Aus der Figur 13 gewonnene Intensitätsverteilung in radialer Richtung. Die Intensitätsverteilungen, die von den Raumwinkeln mit $\varphi_r > 0$ und $\varphi_r < 0$ hervorgerufen werden, sind gestrichelt eingezeichnet. Ebenfalls gestrichelt eingezeichnet ist die auf Seite 39 erläuterte Korrektur.

Figur 15. Aus der Figur 13 gewonnene Intensitätsverteilung in axialer Richtung. Die Intensitätsverteilungen, die von den Raumwinkeln mit $\varphi_r > 0$ und $\varphi_r < 0$ hervorgerufen werden, sind gestrichelt eingezeichnet. Ebenfalls gestrichelt eingezeichnet ist die auf Seite 39 erläuterte Korrektur.

Figur 16. Dispersion D für $\Delta p/p = 10^{-3}$ in Abhängigkeit von den Startkoordinaten der Teilchen für ein Wendelspektrometer mit $k = 0,135$ und Weitwinkelfokussierung 5.Ordnung.

Figur 17. Radiale Halbwertbreiten Δq^* der zweidimensionalen Intensitätsverteilung (gestrichelt, rechte Ordinate) und Auflösung $\Delta p/p$ (durchgezogen, linke Ordinate) für Punktquellen in Abhängigkeit von den Koordinaten q_0, δ_0 der Quelle. Die Abbildung erfolgt durch ein Wendelfeld mit $k = 0,135$ und radialer Weitwinkelfokussierung 5.Ordnung.

Figur 18. Auflösung $\Delta p/p$ für Punktquellen in $q_0 = 0$ als Funktion der axialen Koordinate δ_0 der Quelle bei Registrierung mit einem Spalt für ein Wendelspektrometer mit $k = 0,135$ und Weitwinkelfokussierung 5.Ordnung, für rotationssymmetrische Flachspektrometer mit Weitwinkelfokussierung 5.Ordnung ($k = 0; W$) und mit radial um $q_0 = 0,2$ versetzter Quelle und von φ_r^2 unabhängiger Fokussierung ($k = 0; D$). Der Raumwinkel beträgt $0,229\%$ von 4π .

Figur 19. Schematische Darstellung des Polschuhs eines Wendelspektrometers. Die Achse und der Polschuh sind aus hochpermeablen Eisen. Die Erregung erfolgt durch eine Wicklung, die den Strom entlang der Linie I etwa nach oben und entlang der Linie II wieder zurück führt. Der magnetische Schluß erfolgt über die Achse und über einen Eisenmantel, der über den Polschuh geschoben werden kann.

Figur 20. Schematische Darstellung des Aufbaues zur Messung der Strahlintensität am μ -Kanal. Der Protonenstrahl des Synchro-

zyklotrons SC trifft auf ein internes Target C, dessen Lage durch den Radius r und den Winkel ϑ definiert ist. Die Pionen werden im Zyklotronfeld und dem Magneten MMEC in die beiden Quadrupollinsen LC3, LC4 und in den μ -Kanal gelenkt, in dem Monochromatormagneten MD1 abgelenkt und durch die Quadrupollinsen LB26-LB29 auf das Zählerteleskop fokussiert. Die Pionen werden in dem Absorber A abgebremst und in dem Target T gestoppt. 1,2,3,4 sind Szintillationszähler.

Figur 21. Ströme in dem Magneten MMEC (linke Ordinate) und MD1 (rechte Ordinate) für maximale Intensität in Abhängigkeit von dem Targetwinkel ϑ bei verschiedenen Targetradien R.

Figur 22a. Zählraten für verschiedene Fokussierungsstufen als Funktion des Targetwinkels ϑ bei den für maximale Intensität nötigen Strömen in den Magneten MMEC und MD1.

- I Ohne Fokussierung.
- II Beste μ -Kanal-Fokussierung.
- III Zusätzliche LC3, LC4-Fokussierung.
- IV " " LB26-LB29-Fokussierung.

Ungerade Anzahl von Quadrupolen im μ -Kanal.

Figur 22b. Zählraten für verschiedene Fokussierungsstufen als Funktion des Targetwinkels ϑ bei den für maximale Intensität nötigen Strömen in den Magneten MMEC und MD1.

- I Ohne Fokussierung.
- II Beste μ -Kanal-Fokussierung.
- III Zusätzliche LC3, LC4-Fokussierung.
- IV " " LB26-LB29-Fokussierung.

Gerade Anzahl von Quadrupolen am μ -Kanal.

Figur 23a. Reichweite-Kurven für verschiedene Targetwinkel ϑ bei maximaler Intensität und bester Fokussierung. Absorber und Target bestanden aus Cu, die Targetdicke war 5 mm, die effektive Targetfläche war $10 \times 10 \text{ cm}^2$. Ungerade Anzahl von Quadrupolen im μ -Kanal. R=224 cm.

Figur 23b. Reichweite-Kurven für verschiedene Targetwinkel ϑ bei maximaler Intensität und bester Fokussierung. Absorber und Target bestanden aus Cu, die Targetdicke war 5 mm, die effektive Targetfläche war $10 \times 10 \text{ cm}^2$. Ungerade Anzahl von Quadrupolen im μ -Kanal. $R=222 \text{ cm}$.

Figur 23c. Reichweite-Kurven für verschiedene Targetwinkel ϑ bei maximaler Intensität und bester Fokussierung. Absorber und Target bestanden aus Cu, die Targetdicke war 5 mm, die effektive Targetfläche war $10 \times 10 \text{ cm}^2$. Ungerade Anzahl von Quadrupolen im μ -Kanal. $R=221 \text{ cm}$.

Figur 23d. Reichweite-Kurven für verschiedene Targetwinkel ϑ bei maximaler Intensität und bester Fokussierung. Absorber und Target bestanden aus Cu, die Targetdicke war 5 mm, die effektive Targetfläche war $10 \times 10 \text{ cm}^2$. Gerade Anzahl von Quadrupolen im μ -Kanal. $R=222 \text{ cm}$.

Figur 24. Maximale Pionenstopprate in einem Cu-Target von 5 mm Dicke und einer effektiven Fläche von $10 \times 10 \text{ cm}^2$ für verschiedene Targetradien R in Abhängigkeit vom Targetwinkel ϑ .

I. Gerade Anzahl von Quadrupolen im μ -Kanal.

II. Ungerade Anzahl von Quadrupolen im μ -Kanal.

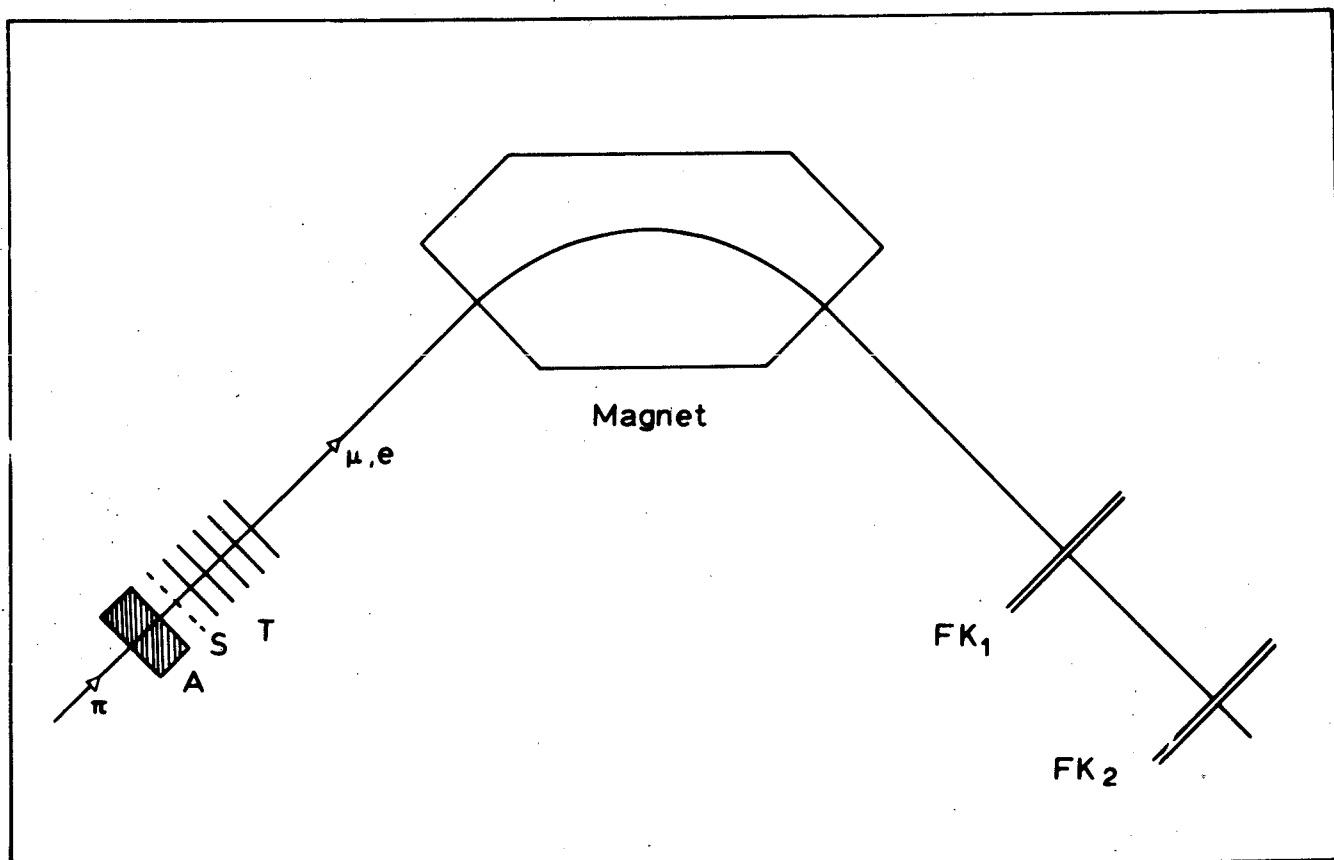


Fig.1

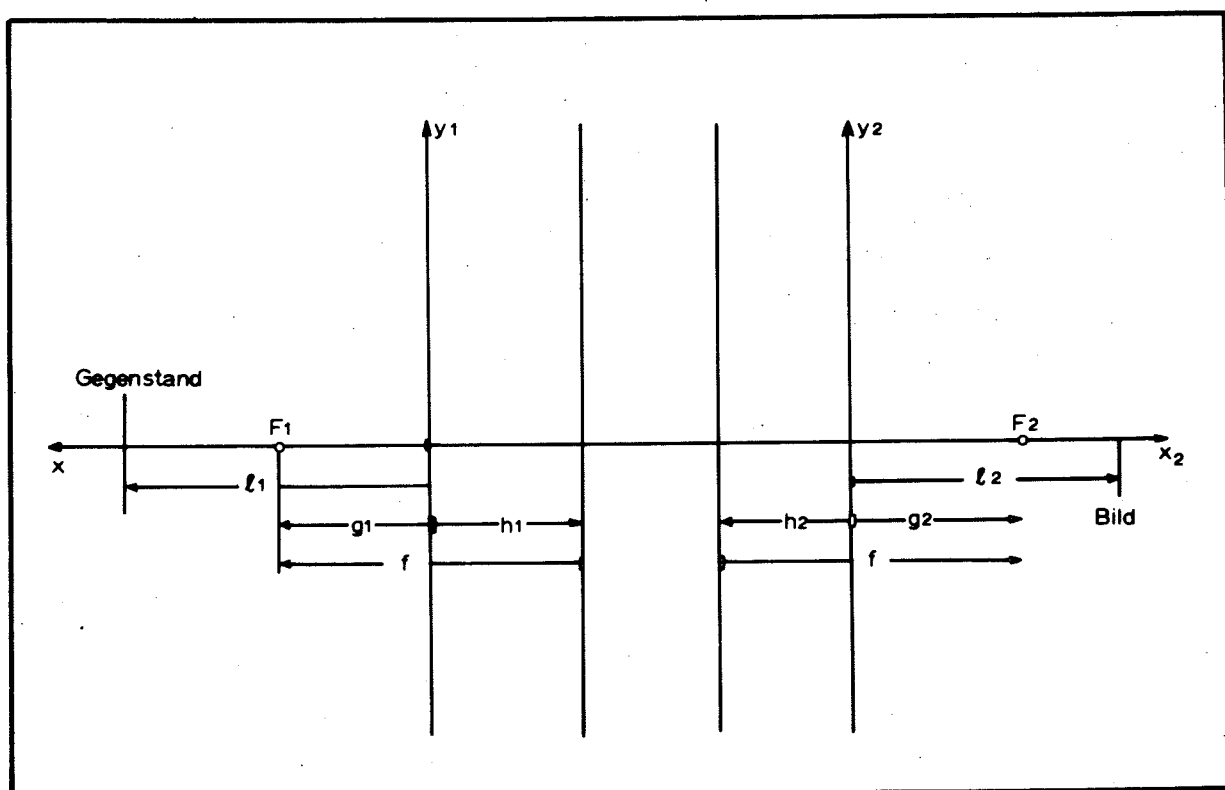


Fig.2

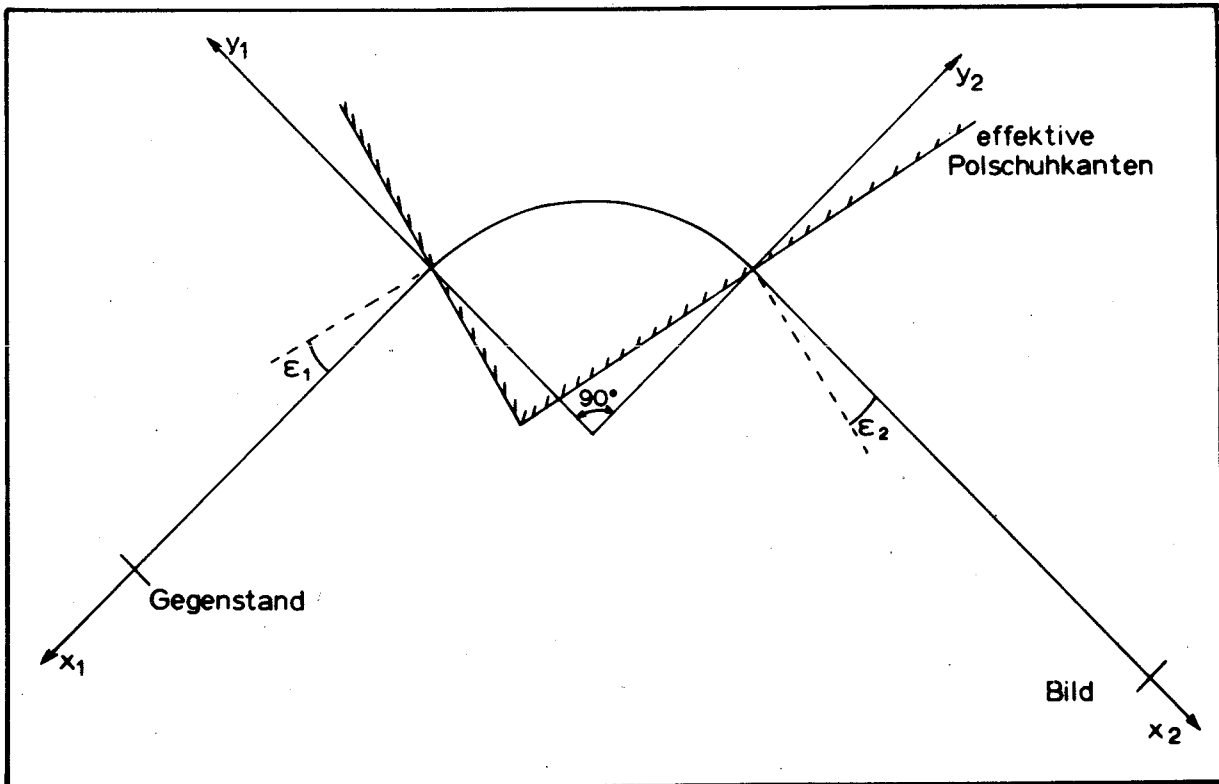


Fig. 3

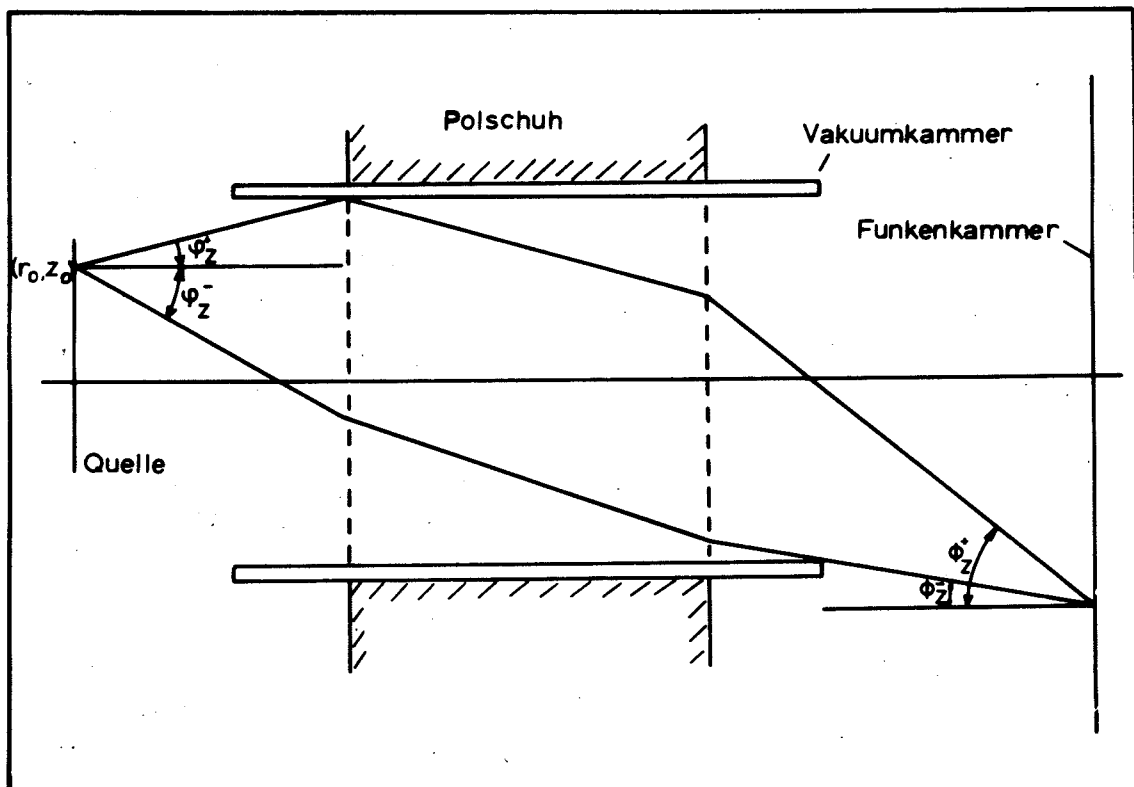


Fig. 4

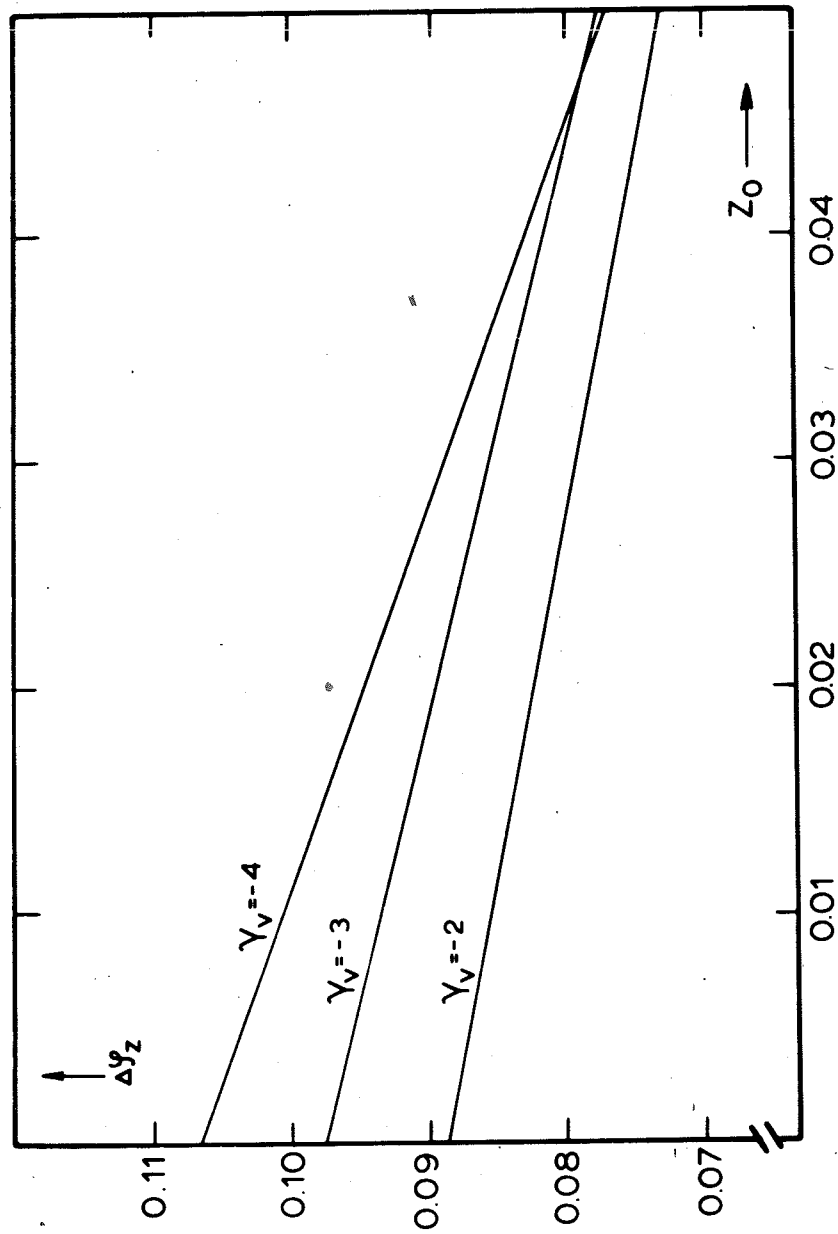


Fig.5

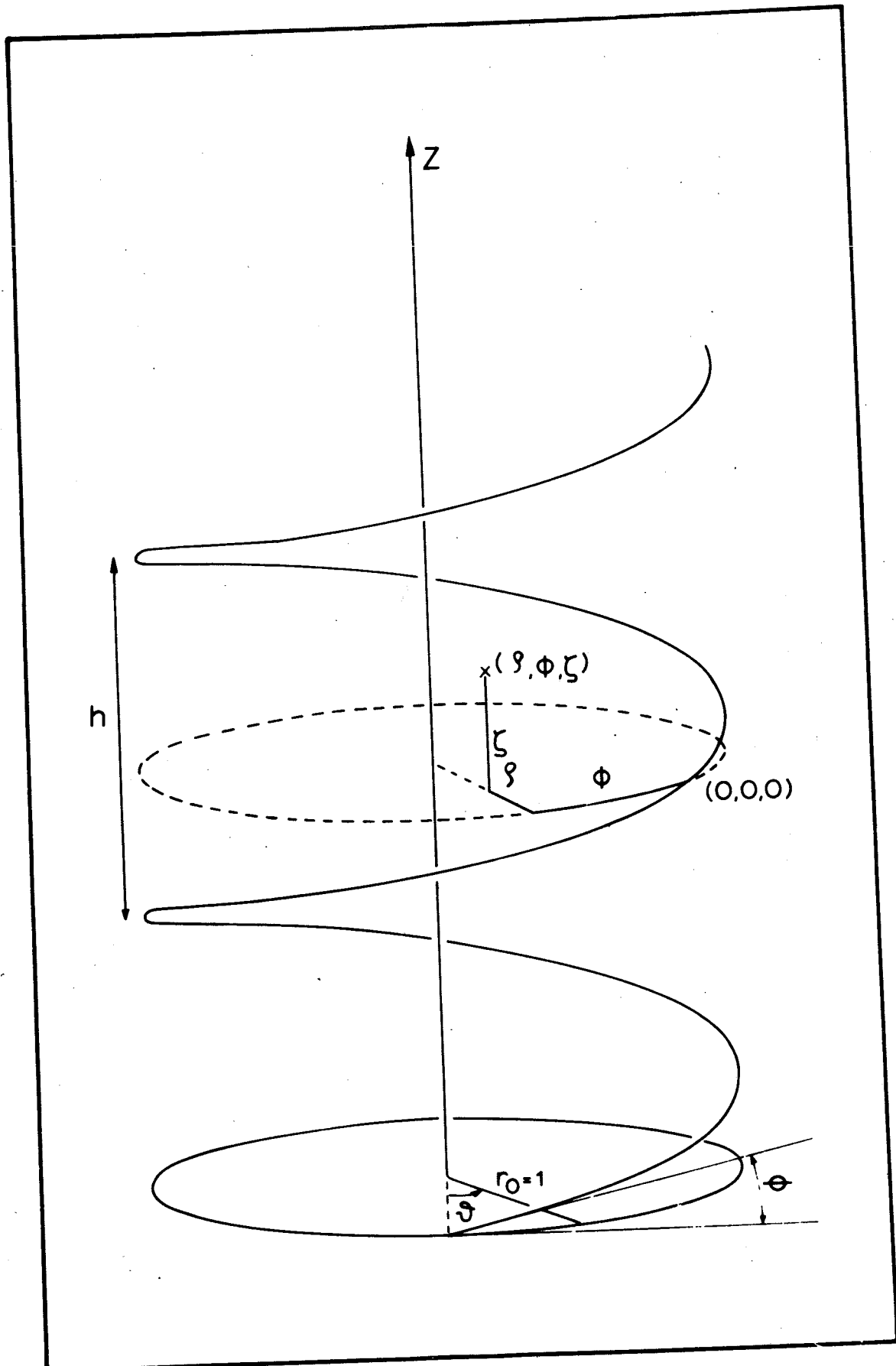


Fig. 6

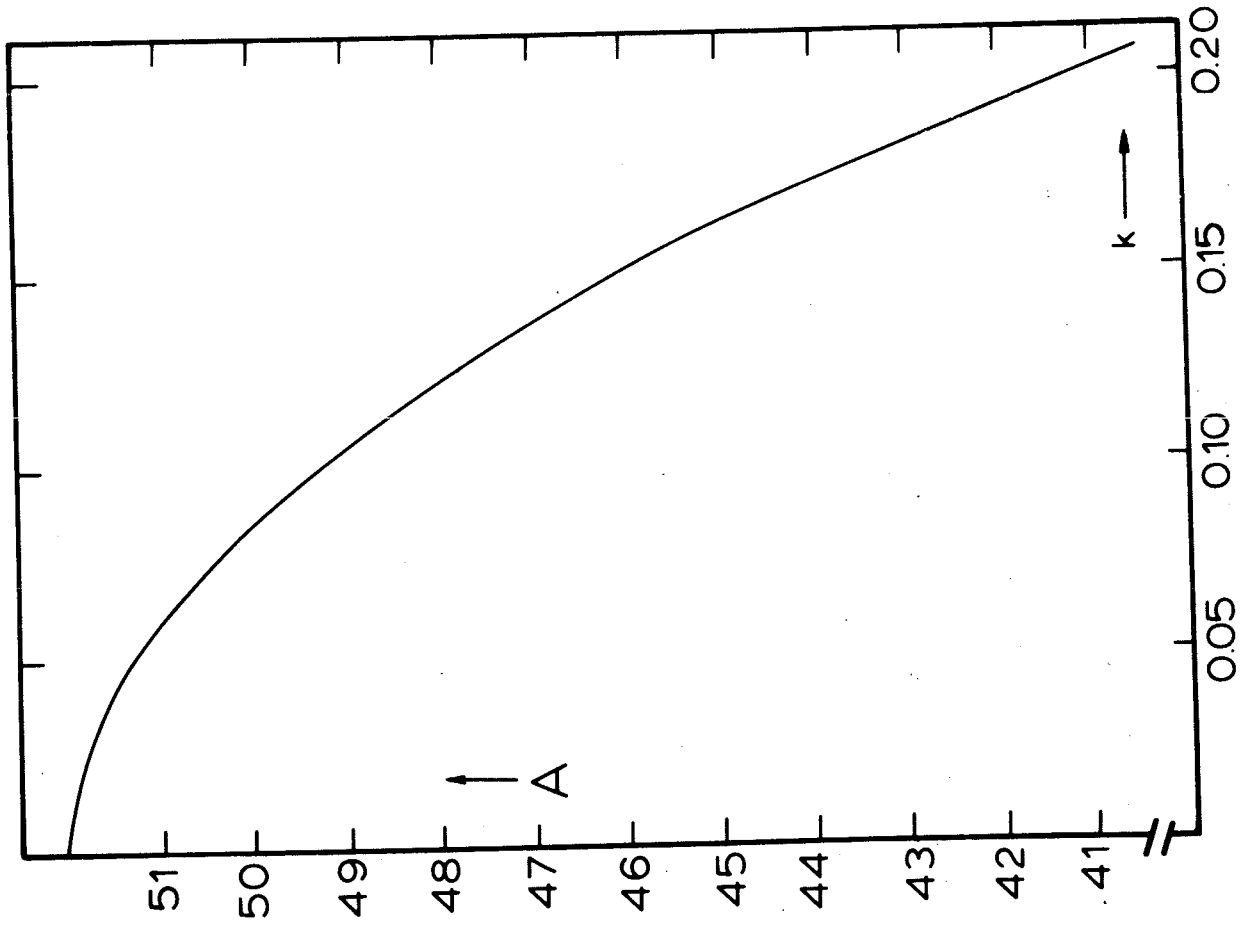


Fig. 8

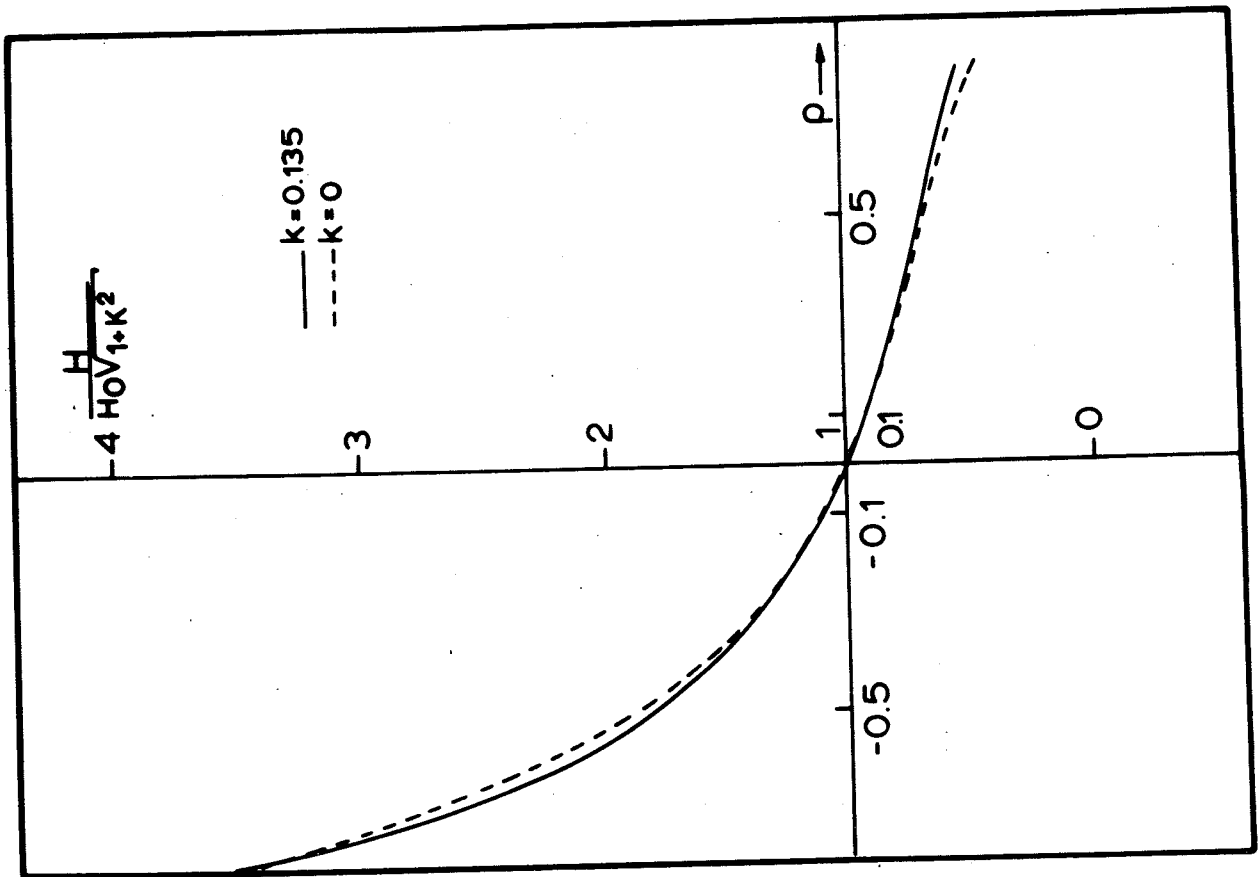


Fig. 7

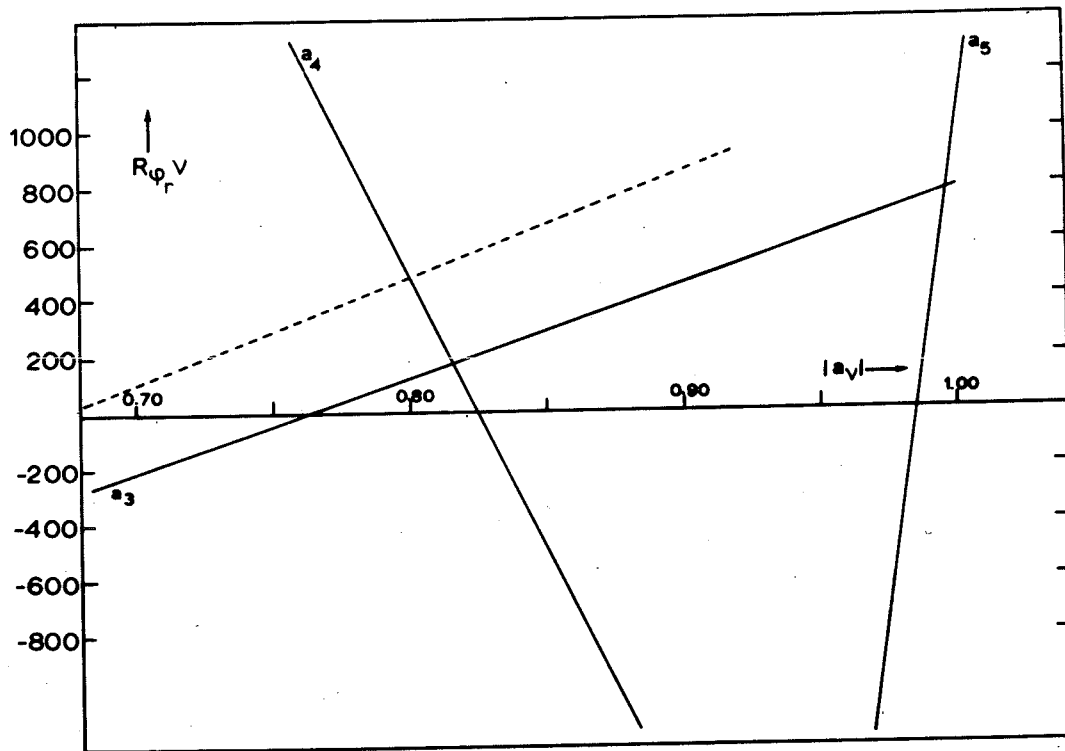


Fig. 10

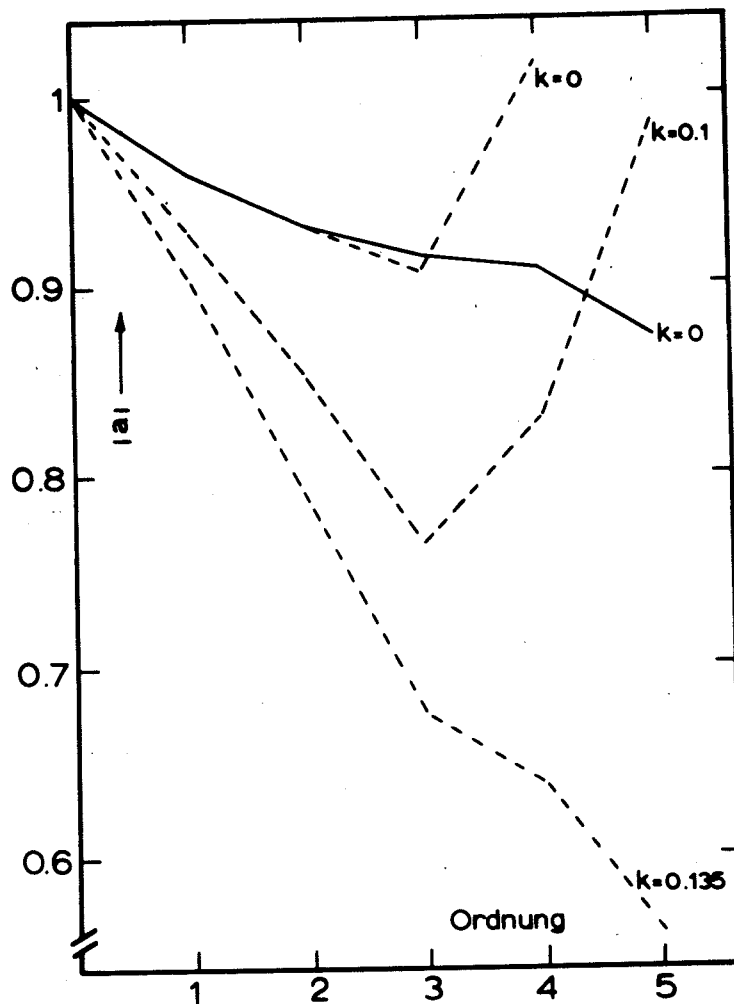


Fig. 11

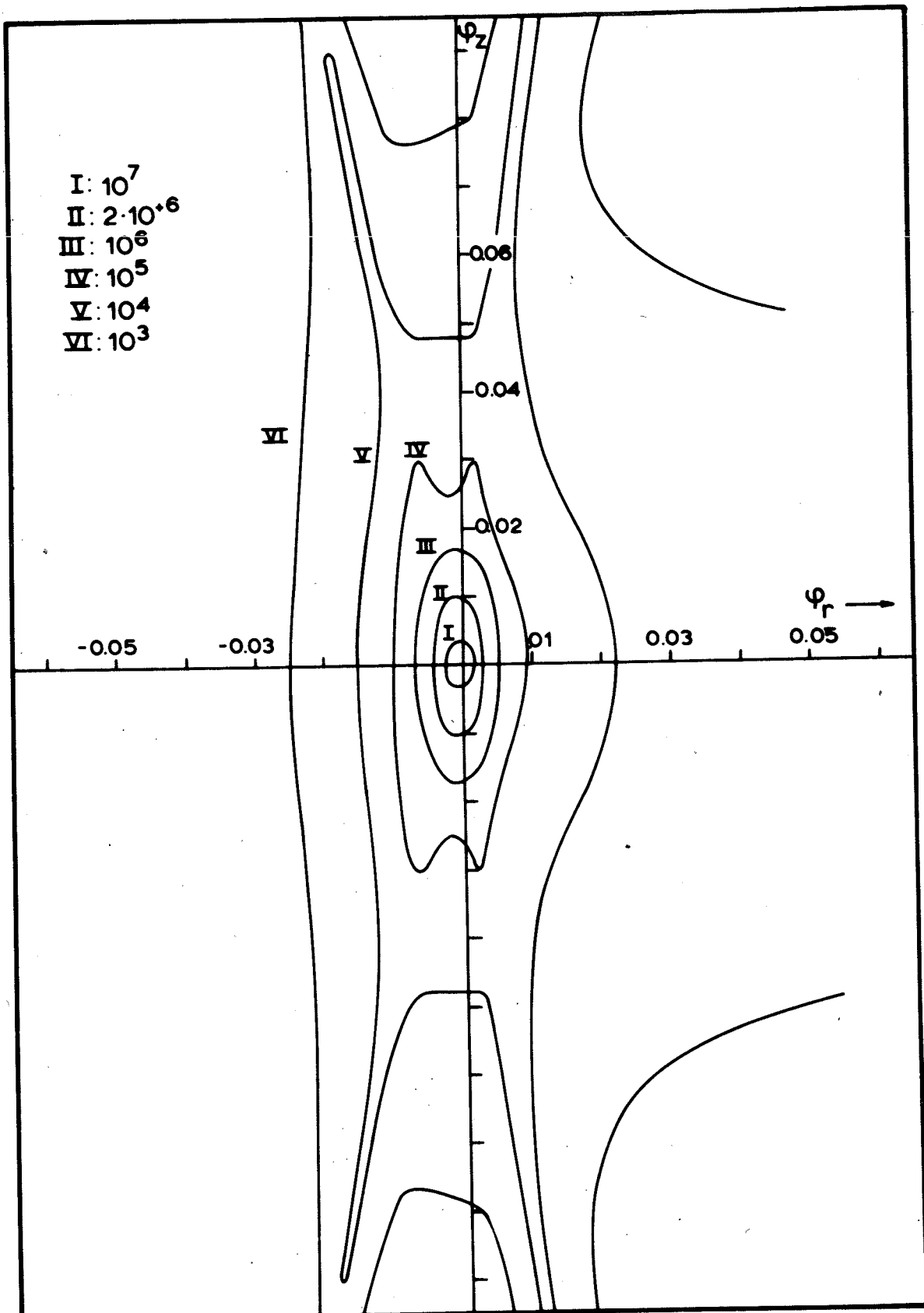


Fig. 12

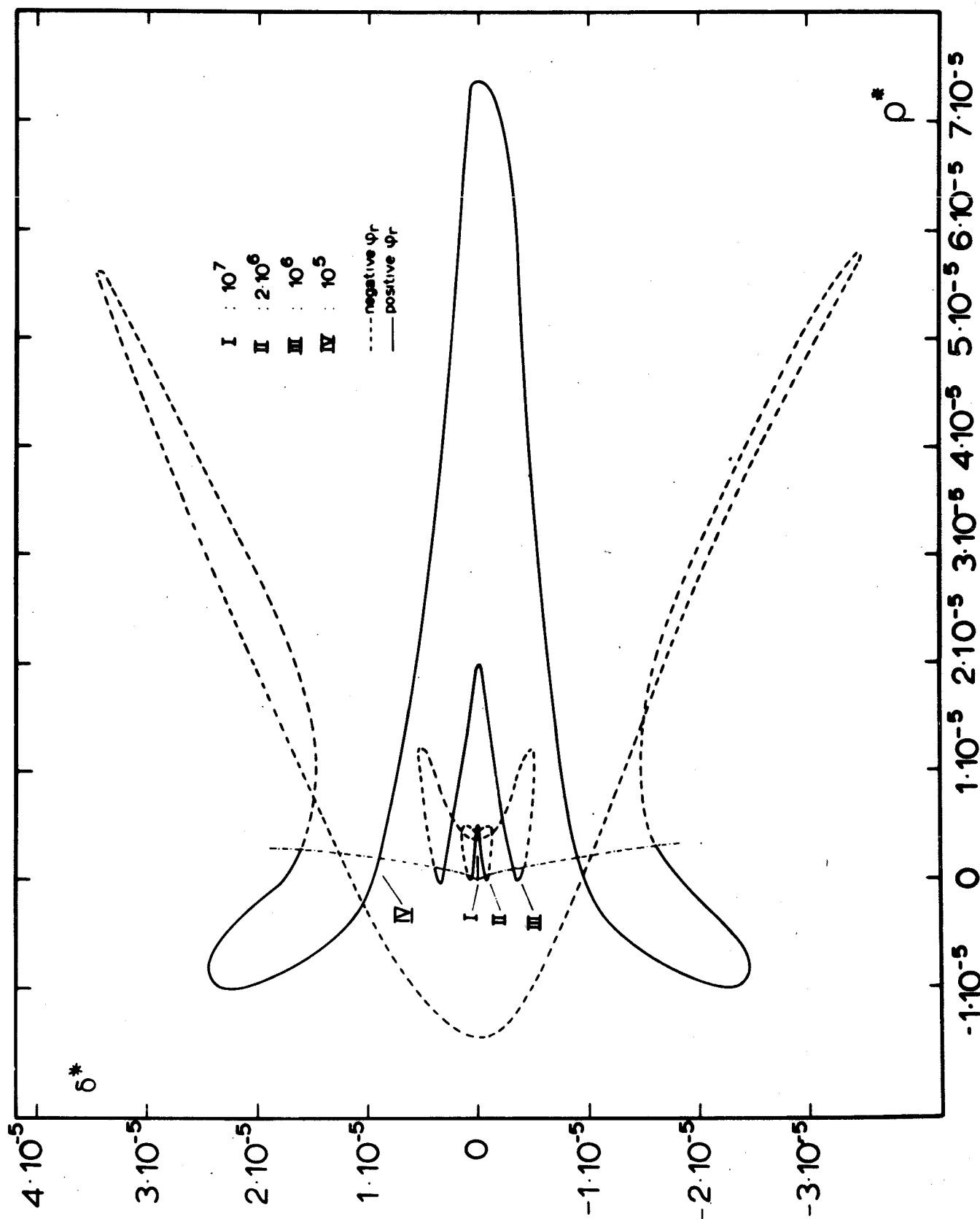


Fig. 13

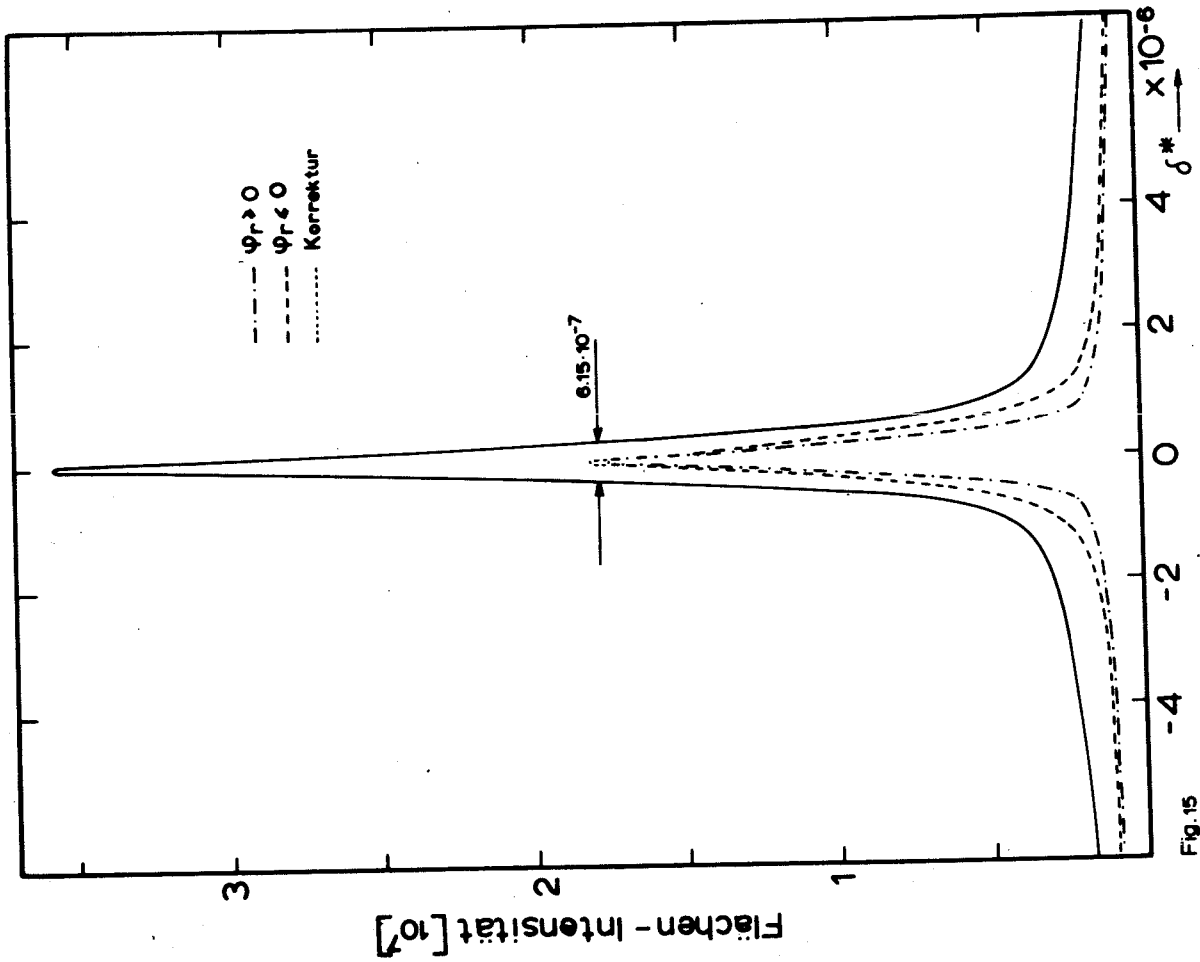


Fig. 15

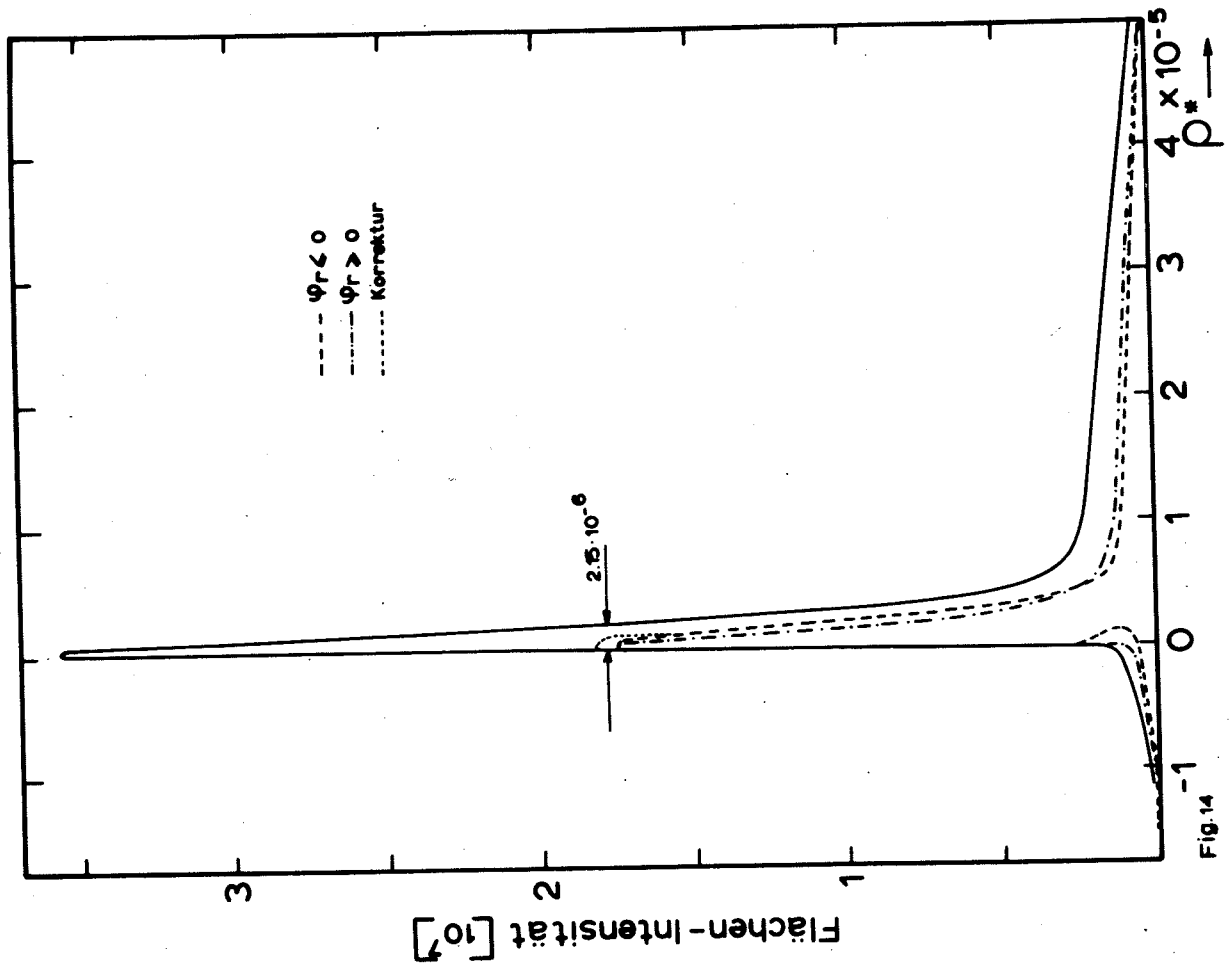


Fig. 14

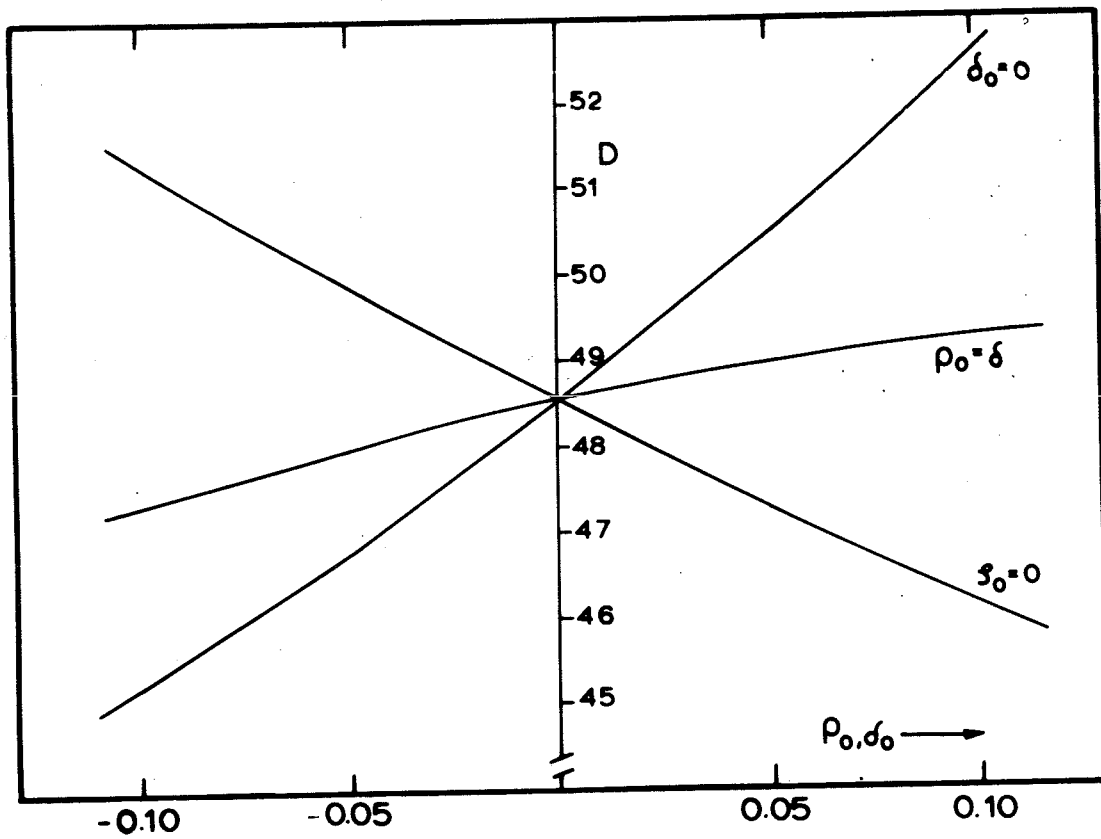


Fig. 16

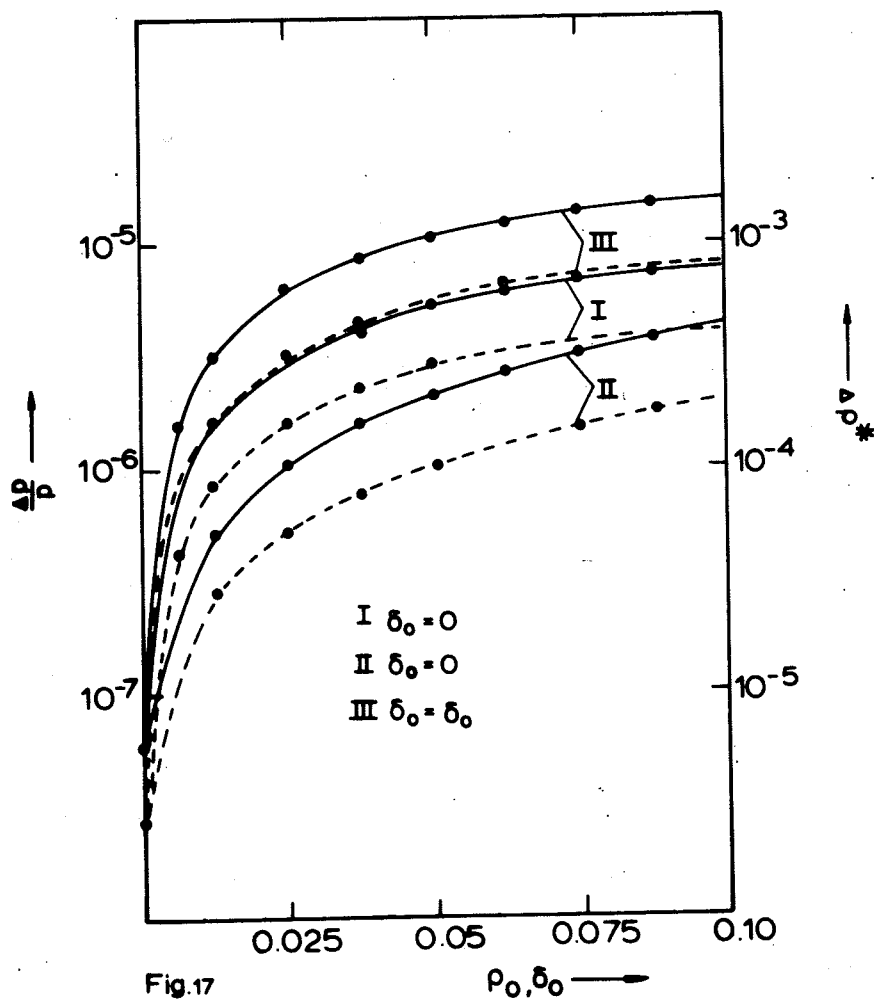


Fig. 17

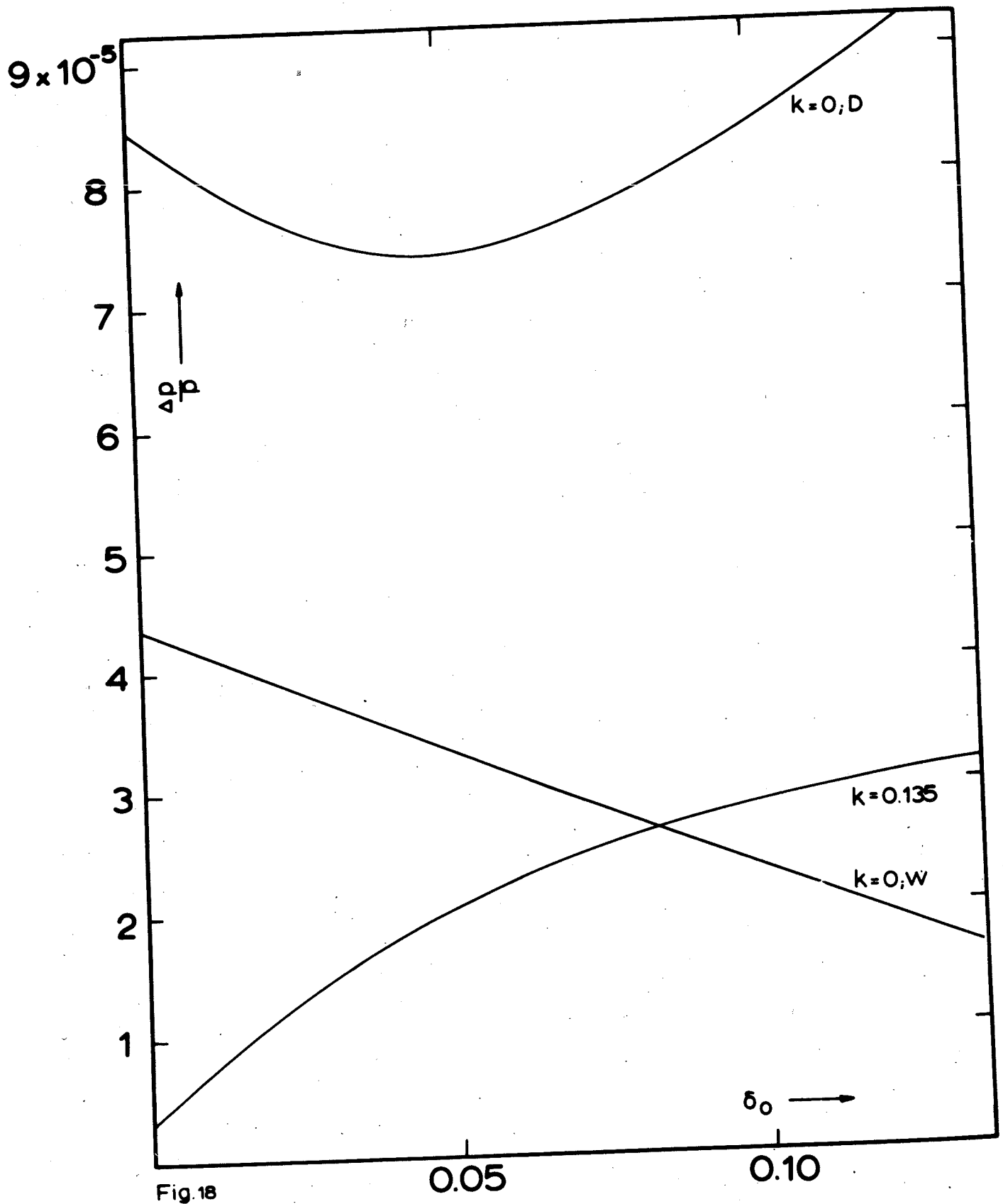


Fig.18

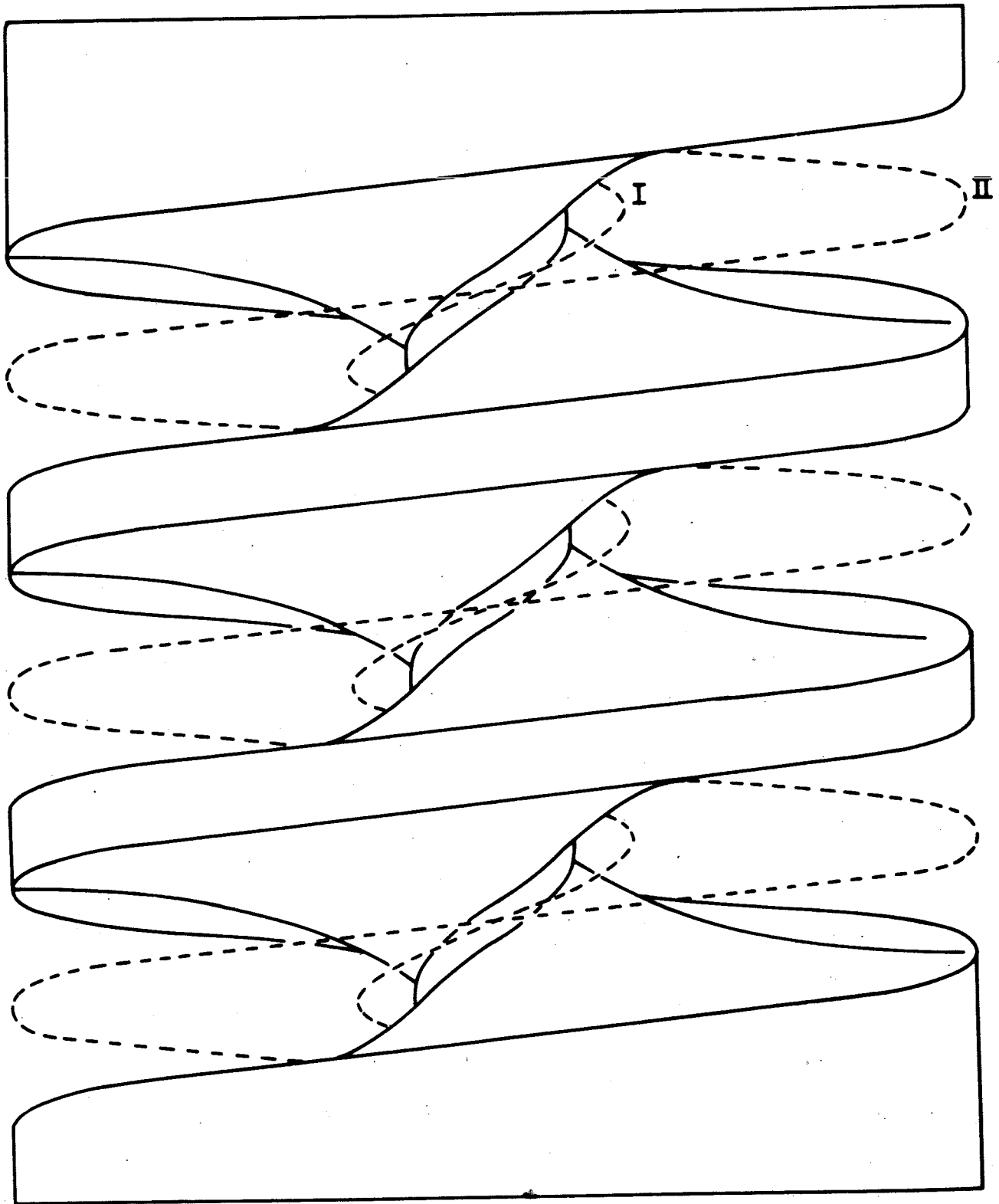


Fig. 19

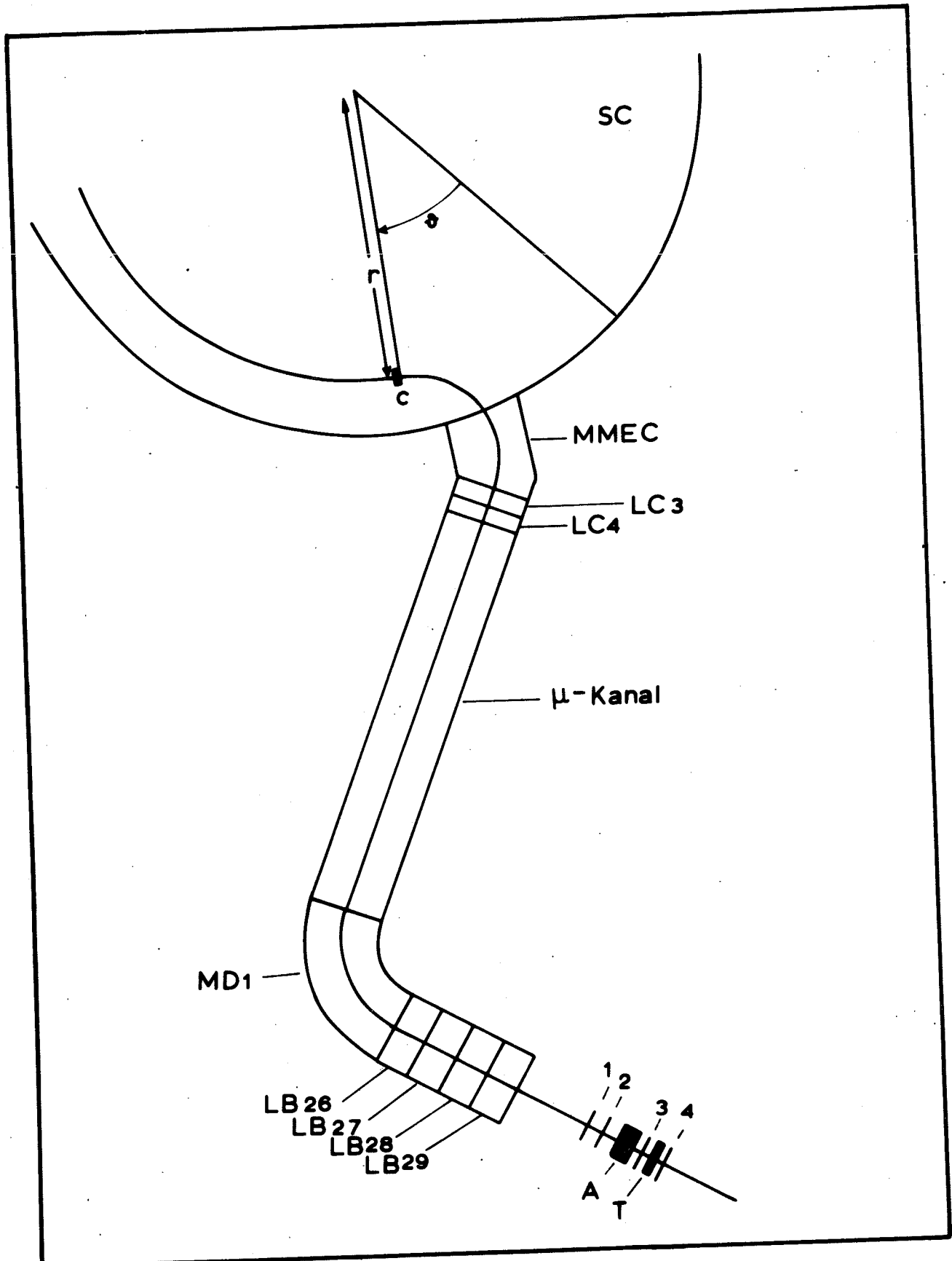


Fig. 20

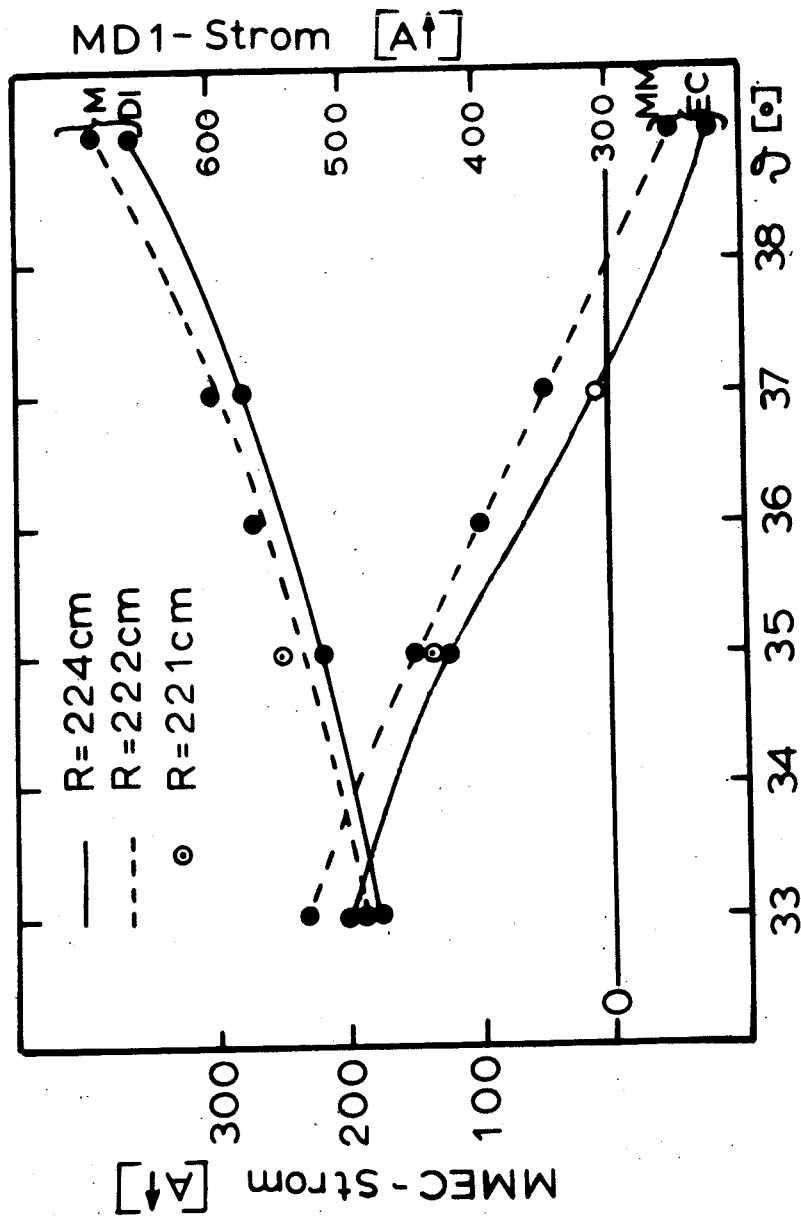
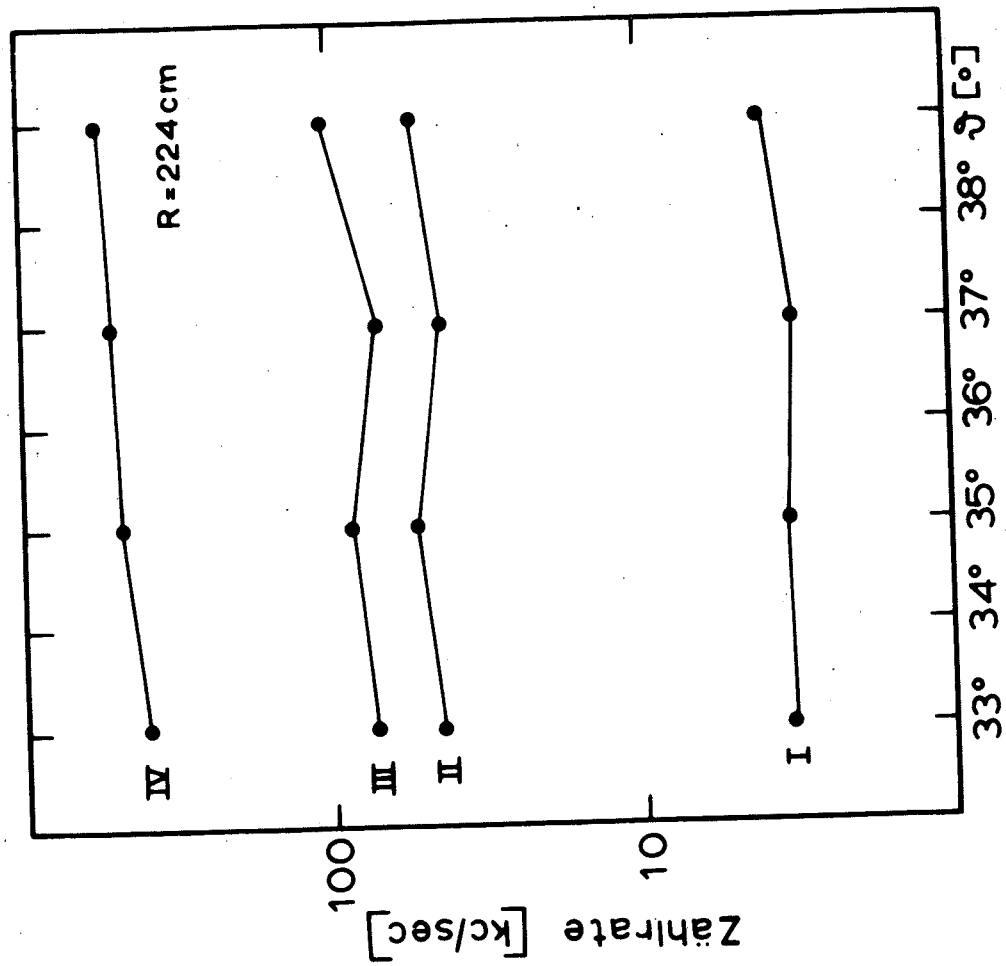
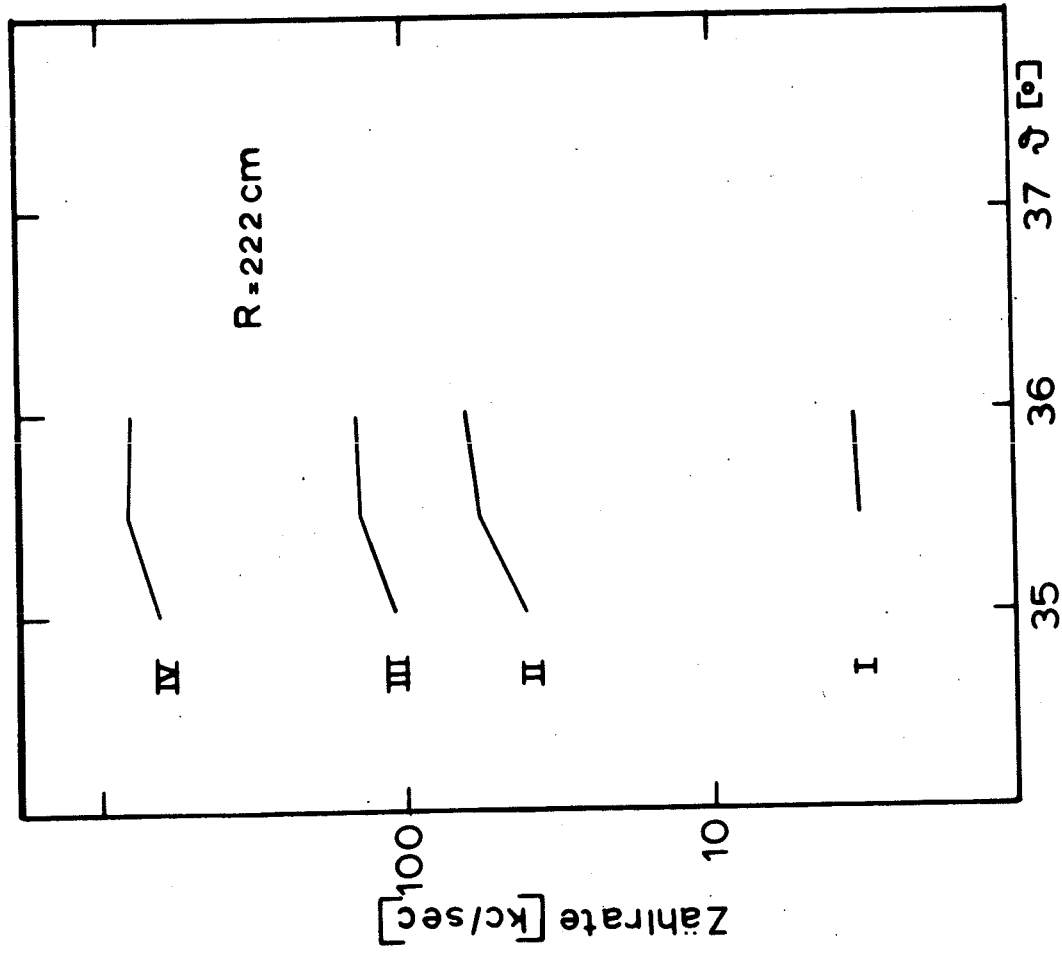


Fig.21



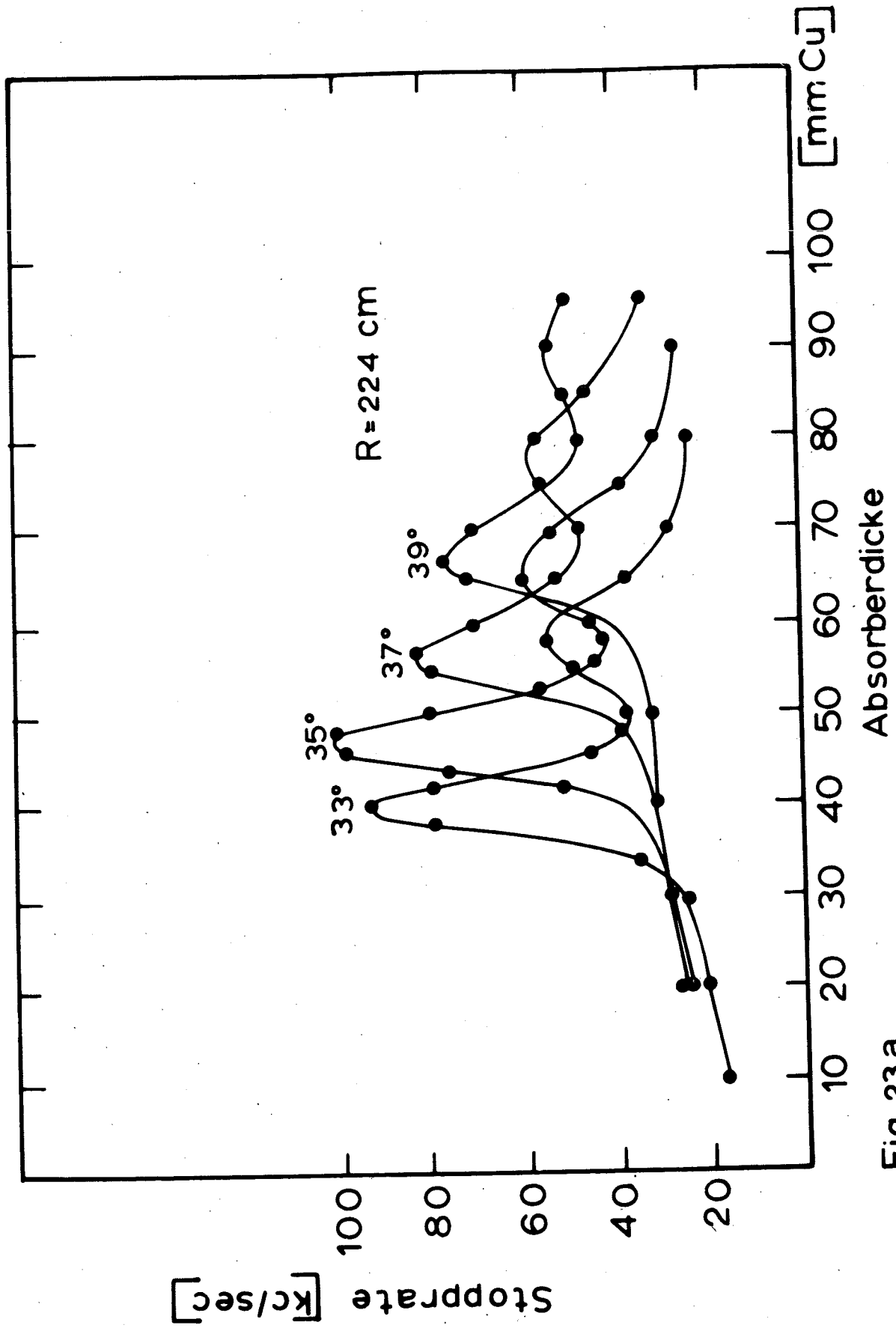


Fig. 23 a

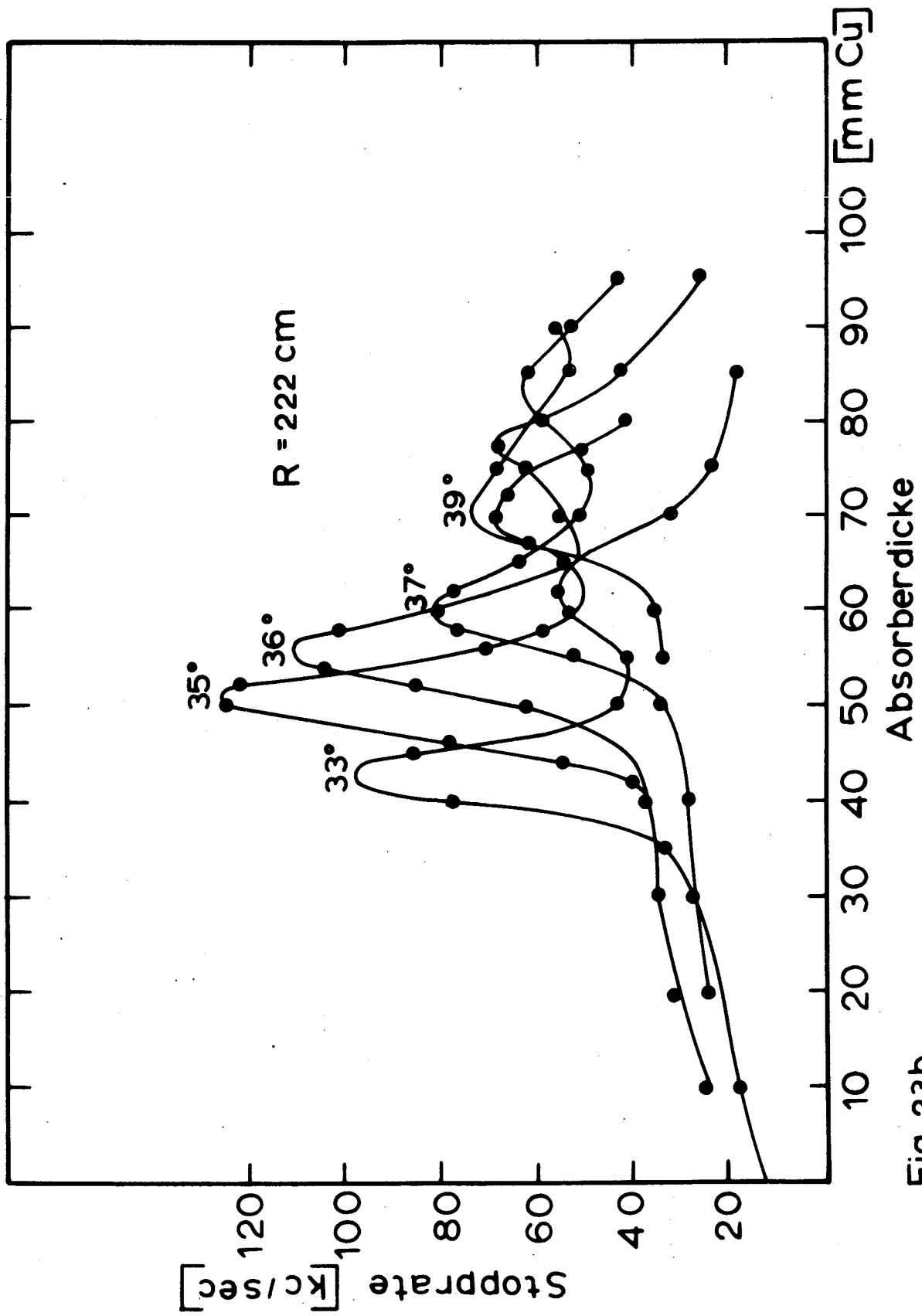


Fig. 23b

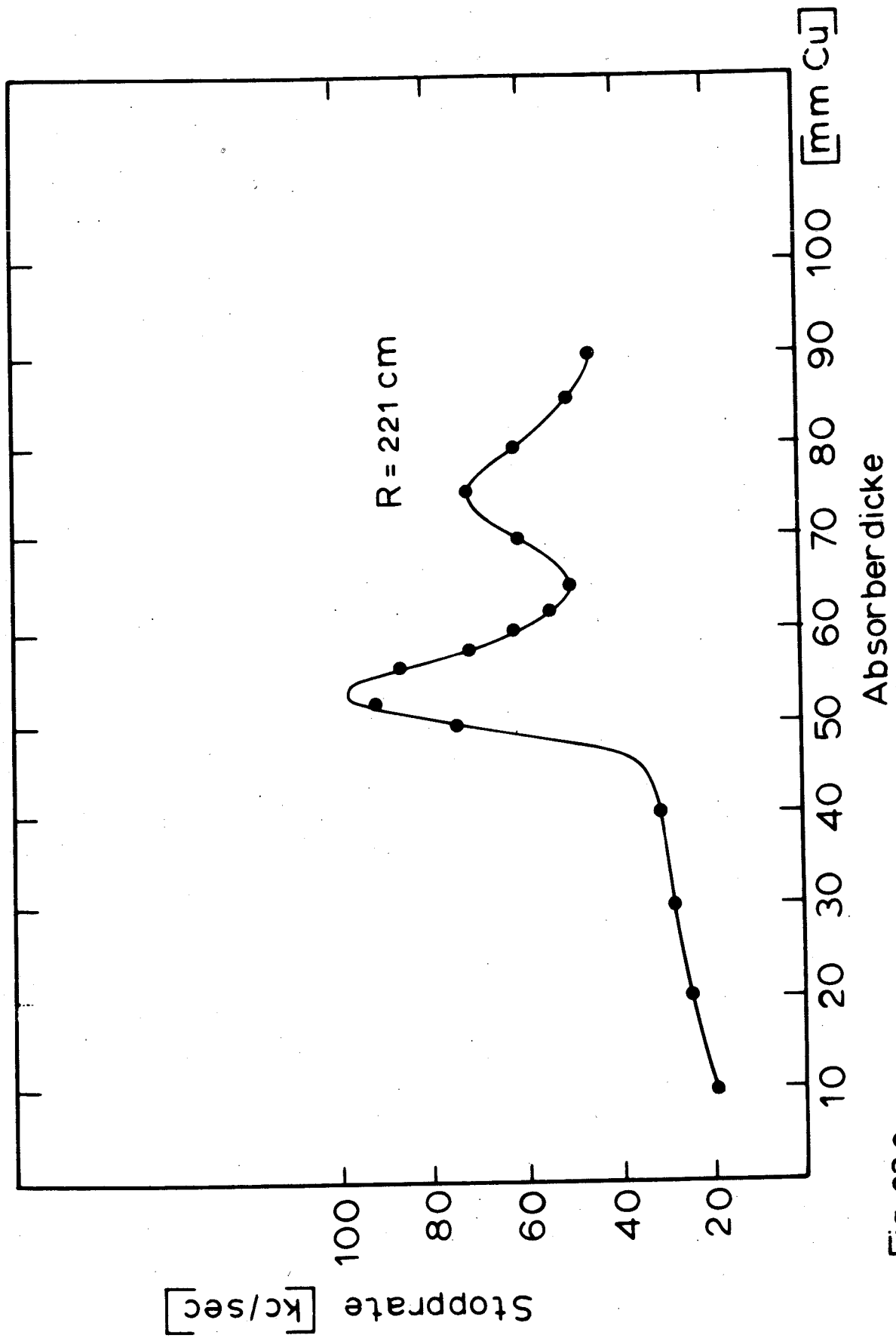


Fig. 23c

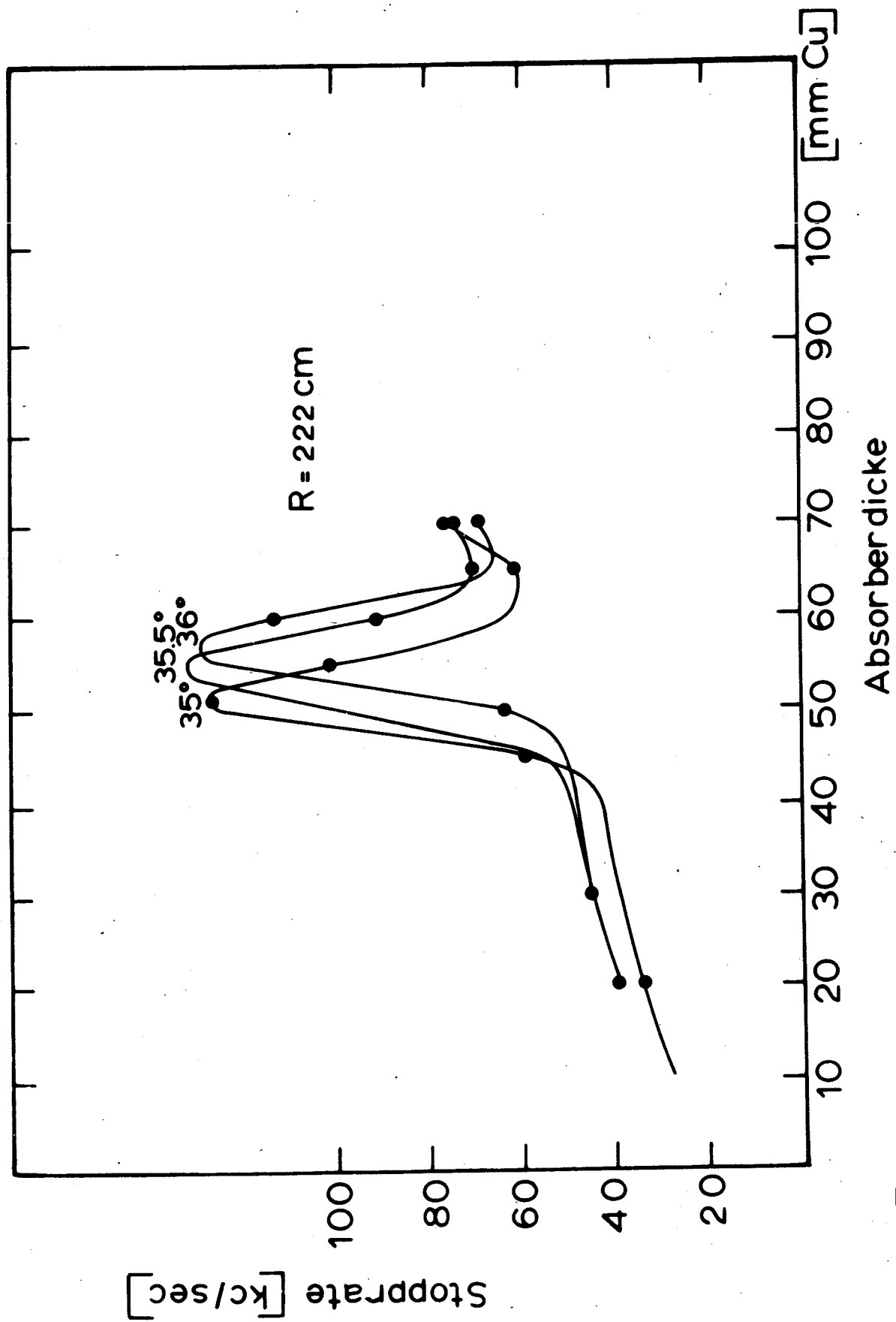


Fig. 23 d

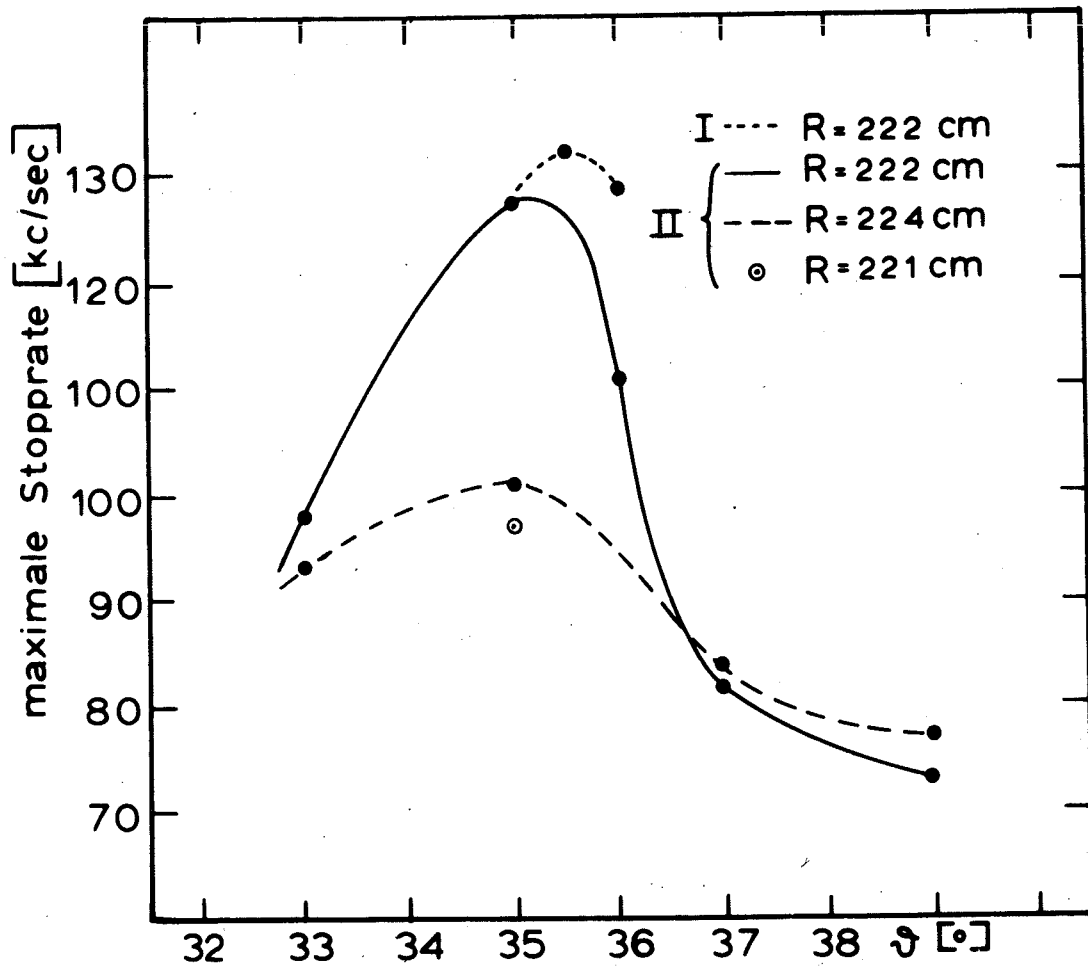


Fig. 24