



ВИСША АТЕСТАЦИОННА КОМИСИЯ  
СПЕЦИАЛИЗИРАН НАУЧЕН СЪВЕТ  
ПО ЯДРЕНА ФИЗИКА, ЯДРЕНА ЕНЕРГЕТИКА И АСТРОНОМИЯ

**Бойка Любомирова Анева**

**“Суперсиметрии, деформирани симетрии  
и многочастични взаимодействиящи системи”**

Научна специалност  
Шифър 01.03.01 (Теоретична и математична физика)

**А В Т О Р Е Ф Е Р А Т**

на

ДИСЕРТАЦИЯ  
За присъждане на научната степен  
“ДОКТОР НА НАУКИТЕ”

Рецензенти:

1. ст. н. с. I ст. дфн Йордан Бранков

2. ст. н. с. I ст. дфн Владимир Герджиков

3. ст. н. с. II ст. д-р Мариян Станишков

София, 2009 г.

Дисертантът работи в Институт за ядрени изследвания и ядрена енергетика (ИЯИЯЕ) на Българска академия на науките (БАН).

Изследванията на дисертационния труд са извършени в ИЯИЯЕ - БАН, Университета в Мюнхен, Теоретична лаборатория на ОИЯИ, Дубна, Теоретичен отдел на ЦЕРН, Женева, Университета в Хелзинки, Центъра по теоретична физика в Триест

Дисертационният труд е обсъден и насочен за защита от Разширен Семинар на лаборатория Теория на елементарните частици на ИЯИЯЕ, състоял се на 28.08.2008.

## I. Увод

- Цел на изследователския труд

Целта на настоящето изследване е изучаването на симетриите на физически системи и тяхното приложение за построяване на точно решаеми модели. Изследването е осъществено по две основни направления. От една страна, то е посветено на симетрии, основаващи се на пространствено-временни некомутативни алгебрични структури, техни реализации и представяния. От друга страна, намерените реализации се прилагат за получаване на точни аналитични резултати за модели на статистически ансамбли със стохастична динамика. В съществената си част това са модели с приложение към експериментално наблюдаеми многочастични системи и намиране на аналогии с интегрируеми модели на квантовата теория на полето и статистическата физика.

- Актуалност на проблема

Алгебрите на деформирани симетрии, т.н. квантови групи, са богати математически структури, които се развиват интензивно през последните две десетилетия. Те възникват в различни области на математиката и физиката, като алгебри на Ли и техните представяния, специални функции, операторни алгебри, некомутативна геометрия, теории на възлите, квантовия метод на обратната задача, интегрируеми модели, конформни теории, струнни теории. Само по себе си това означава дълбоки връзки между тези, на пръв поглед, разпородни области. Значимостта на квантовите групи е в тяхното прилагане там, където обикновените алгебри на Ли са с ограничено приложение. Суперсиметриите са първият пример за нетривиално приложение във физиката на симетрии с некомутативни параметри. Стохастичните процеси са много добра област за осмисляне на ролята на деформирани симетрии, тъй като параметърът на деформация има ярок физически смисъл. За многочастичните процеси на дифузия върху едномерна решетка този параметър е отношението на вероятностите за преход наляво/надясно. Процесите със стохастична динамика са в основата на неравновесните системи, които са навсякъде в природата и тяхното поведение все още не е добре разбрано. По тази причина те са обект на непрекъснато активно изследване. Ние разглеждаме вероятностни процеси на отворени дифузионни системи върху решетка, чрез които се моделират биологичен транспорт, поток на трафик, изграждане на повърхнини и др. Точното намиране на вероятностите на преход за тези процеси за произволно време е нетривиална и трудна задача. В дисертацията, за изследваните многочастични системи, е намерено решение на този проблем чрез диагонализация на матрицата на преход. За целта се прилагат нови алгебри, чиято теория и представяния се развива паноследък усилено. Това са алгебрата на Аски-Уилсон и тридиагоналните алгебри, за които се доказва, че възникват като алгебри на гранична симетрия за решеткини многочастични процеси с изключване и водят до точното им решаване.

## II. Съдържание на дисертацията

Дисертационният труд се състои от увод, три глави, заключение и библиография.

Авторефератът има свое номериране на формулите. След всяка формула е дадена

## Увод

В увода се подчертава ролята на симетриите като се обръща внимание на суперсиметриите и деформираните симетрии. Очертават се ролята и актуалността на многочастичните взаимодействия системи. Посочва се необходимостта за тяхно изследване с цел точно решаване, за което именно деформираните алгебрични структури предоставят добра възможност.

Симетриите и следващите от тях принципи за инвариантност винаги са били от изключително значение за създаване на физическите теории. Изследванията в областта на физическите науки са се развивали по две главни направления. Първото се основава на емпирично изследване на експерименталните данни с цел симулации и моделиране на природните явления. Второто се състои в построяване на интегрируеми модели, използвайки симетриите за точно описание на физическите системи, въз основа на пълен набор запазващи се величини, вследствие на принципите на инвариантност.

В съвременната физика ролята на симетриите е толкова съществена, че нито една теория не може да бъде формулирана без тях. Симетриите се прилагат, за да се формулират законите в рамките на смислена квантова теория на полето [1]. Основните симетрии във физиката са пространствено-временни и вътрешни. Законите на класическата механика следват принципите на ротационна инвариантност, която е свързана с унитарната група  $SU(2)$ , отговорна за силата в квантовата физика. Обединението на електростатиката с магнетизма в теория на Максвел изисква обобщение на групата на въртене до групата на Лоренц. Във вътрешното пространство обобщението на  $SU(2)$  до  $SU(3)$  породих кварковия модел. За успешен се смята Стандартният модел на обединение на силни, слаби и електромагнитни взаимодействия, изграден на базата на групата на Лоренц и  $SU(3)_C \times SU(2)_W \times U(1)$ . Стандартният модел е препормируема калибровъчна квантова теория на полето [2, 3], която е експериментално потвърдена и описва много добре физиката на разстояния до  $10^{-16}$  см. Тя се допълва от Айнщайновата теория на гравитацията, която е потвърдена теория на големи разстояния.

В ядрената физика има класификация на Вигнер [4] и Хунд [5] на ядрените нива, която се основава на групата  $SU(4)$ , съдържаща подгрупата на силата и подгрупата на изоспина, и обединява по този начин пространствено-временни и вътрешни симетрии. Имаше опити тази идея да се приложи във физиката на частиците, като се включи групата  $SU(2)$  на силата с вътрешната група  $SU(3)$  на кварковия модел в рамките на групата  $SU(6)$  и така бяха получени предсказания за масите на частици с различен спин. Но опитите за включване и на групата на Лоренц се оказаха неуспешни. Съществува теорема, известна като теорема на Колман и Мандула [6], елегантно формулирана от О'Райферти [7], че в четиримерна релативистична квантова теория на полето, удовлетворяваща аксиомите за локалност, единственост на вакуума и краен брой частици, единствената възможност за включване на вътрешни симетрии е прякото произведение на групата на Лоренц с групата на вътрешни симетрии.

Нов вид симетрия - суперсиметрията - възникна през 70-те години на 20 век, която предостави възможност за обединение на пространствено-временни с вътрешни симетрии. Математическа основа на суперсиметрията са градуираните алгебри на Ли, които имат както комутирани, така и антикомутирани генератори и параметри [8, 9]. Новата симетрия бе открита почти едновременно и независимо от Голдфалд и Лихтман [10], Волков и Акулов [11], и Вес и Зумино [12].

Суперсиметричните теории имат много по-добри свойства на сходимост в сравнение с известните модели от квантовата теория на полето.

Суперсиметричните теории са обезкуражаващи поради свойствата на представящата на алгебрата, от които следва, че теорията трябва да съдържа еднакъв брой бозони и фермиони, изродени по маса. В природата бозоните и фермионите не се обединяват в мултиплет с еднакви маси. Оттук следва и предсказанието за суперпартньори на реалните частици - на всеки реално съществуващ бозон в природата съответства фермион и обратно. Суперсиметричните теории трябва да бъдат спонтанно нарушени и то така, че свойствата на ренормируемост да се запазват. Разликата в масите на суперсиметричните партньори може да бъде доста голяма. Предполага се, че суперсиметрията се реализира в областта на TEV, за което основен мотив е решението на проблема за иерархията във физиката на частиците. В обединена теория обединяващата калибровъчна група трябва да бъде спонтанно нарушена, за да даде стандартния модел. Схемата на нарушение трябва да бъде стабилна, като съответните параметри получават радиационни поправки само от порядъка на масовата разлика на суперсиметричните партньори. Масова разлика от порядъка на електромагнитната скала на нарушение (т.е. от порядъка на масата на  $W$  бозона) е в областта на 1 TEV и скоро ще бъде достигната на експериментите в ЦЕРН, и суперсиметричните партньори, ако съществуват, ще бъдат открити.

Със суперсиметрията понятието пространство бе разширено до суперпространство [13], т.е. с комутирани и антикомутирани координати. По такъв начин гравитацията бе формулирана като геометрична теория на суперпространството. Супергравитацията има по-добри свойства на сходимост, но все още не е напълно ренормируема теория.

Ролята на симетриите винаги се е съсредоточавала около проблема за разходимостите в пертурбативна квантова теория на полето. В известна степен суперсиметриите подобряват ситуацията с частично отстраняване на сингулярностите на малки разстояния.

Алтернатива за решаване на проблема с разходимостите е отслабване на някои аксиоми в квантовата теория на полето по контролируем начин, за да не се получи противоречие с експерименталните данни. Това се прави в теория на струните, където понятието частица се заменя със струна - аксиомата за локалност е отслабена и броят на частиците става безкраен, безброй много трентения на струната.

Трябва да се отбележи, че възраждането на струнните теории през 70-те години на 20-ти век бе подготвено от суперсиметрията. Малко преди това в предложението от Венециано дуално-резонансен модел имаше проблем за отстраняване на духови състояния с отрицателна норма, дължащи се на временно-подобни компоненти на четимерни хармонични

осцилатори, в термините на които бе формулиран моделът. Проблемът беше разрешен чрез налагане на връзки върху физическите състояния в подход основан на безкрайномерната алгебра на Вирасоро.

След това Намбу издигна идеята, че осцилаторите представляват релятивистка струна и подходът бе формулиран като теория на полето в двумерно пространство с координати  $(\tau, \sigma)$ , а полетата са координатите на Минковски  $x_\mu(\tau, \sigma)$  на точките на мировата линия на струната, където алгебрата на Вирасоро е алгебрата на Ли на групата на конформни трансформации. По аналогия с квантовата електродинамика, конформната симетрия бе наречена калибровъчната симетрия на дуалните модели. За да има фермиони и бозони с отрицателна четност, Невьо, Шварц и Рамонд [14, 15] включиха фермионни осцилатори и проблемът за отстраняване на духови състояния възникна отново. Тогава Невьо, Шварц и Торн [16] показаха, че правилната алгебрична схема е алгебра, която да съдържа антикомутиращи генератори, с алгебрата на Вирасоро като четна подалгебра. Комутиращите и антикомутиращите генератори се представят като билинейни комбинации на осцилаторни оператори на раждане и унищожение, и удовлетворяват комутационните съотношения (комутатори и антикомутиатори) на  $Z_2$ -градуирана алгебра (супералгебра). Аналогично на бозонния случай тази симетрия осигурява непротиворечиви връзки за отстраняване на духови състояния. Антикомутиращи полета  $\psi_\mu(\tau, \sigma)$  бяха въведени, за да представляват фермионните полета, т.е. фермионните степенни на свобода на струната. В подходяща, конформна калибровка симетрията беше безкрайномерна алгебра с комутиращи и антикомутиращи параметри, която действва линейно върху полетата  $x_\mu(\tau, \sigma)$  и  $\psi_\mu(\tau, \sigma)$ .  $Z_2$ -градуираната алгебра бе интерпретирана от Жерие и Сакита [17] като алгебра на генератори на трансформациите на полетата и за това ги нарекоха суперкалибровъчни трансформации.

В двумерното групата на конформни (и суперконформни) трансформации е безкрайномерна. Това е групата на дифеоморфизми на координатите на светлинния конус. Суперкалибровъчните трансформации бяха обобщени в четиримерно пространство от Вес и Зумино до градуирана алгебра, чиято четна подалгебра е конформната група в четиримерното. Трансформациите действат линейно върху локални полета, чийто генератори са интегрални от супертокове по пространствено-подобни повърхности. Бяха написани инвариантни Лагранжиани, създадена бе супергравитация, която, както вече споменахме, не е напълно препоръчителна теория.

Друга възможност да се избегне сингулярното поведение на малки разстояния е промяна на алгебричната структура на квантовата теория на полето, която се базира на каноничната схема на квантовата механика и е алгебрично свързана с диференциални многообразия. Некомутативната геометрия предостави нова рамка за формулиране на физическите теории.

Идеята за некомутативност във физиката ни връща до Хайзенберг [18], който в зората на квантовата теория на полето предложи модификация на пространство-времето чрез алгебрични структури, водещи на малки разстояния до пространствени съотношения за неопределеност. Тази идея е доразвита от Снайдер [19] до физически модел, основаващ се

на такива алгебрични структури. Данните от съвременните експерименти във физиката на много малки разстояния стимулират развитието на подобни теоретични идеи за структурата на пространство-времето, материята и симетриите, които могат да бъдат проверени на бъдещите ускорители.

Теорията на струните се приема като създаваща единна рамка за калибровъчните теории, суперсиметрията и супергравитацията, така че за първи път структурата на материята и на вселената да могат да бъдат описани с общ език [20, 21, 22, 23].

Именно суперсиметрията подготви пътя за интензивно развитие на некомутативната геометрия и деформирани пространствено-временни алгебрични структури. Суперпространството с антикомутиращи координати е първият пример за некомутативно пространство, съответстващ на граничния случай  $q = -1$  на параметъра на деформация.

Философията, върху която се гради квантуването чрез деформация във физиката [24] е формулирана непротиворечиво от Флато [25, 26, 27] преди около 30 години, който издига идеята, че преминаването от едно ниво на физическа теория към друго, по-финно, може да се разбира в смисъла на използваната от математиците теория на деформациите. Пример е преминаването от класическата физика на Нютон към специалната теория на относителността, където групата на Галилей се деформира до групата на Пуанкаре с параметър на деформация  $c^{-1}$ , като  $c$  е скоростта на светлината. Най-популярният пример е квантуването на класически системи. Могат да се строят нови теории чрез деформиране на съществуващите, дори последните да са математически строги. Квантуваните универсални обвиващи алгебри, т.е. квантови групи, които се изучават и развиват усилено в математическата физика като деформирани алгебри на Хопф, също са примери за квантуване чрез деформация [28].

Квантовите групи възникнаха в работите на Л.Д.Фадеев [29, 30] и неговата в Петербург по метода на обратната задача за интегрируемите модели. За първи път алгебрата  $U_q(sl(2))$  се появява в работата на П.Кузнец и Ю.Решеткин [31] по XYZ-модел с висп спин. Най-забележителната черта на квантовите групи е появата им в различен контекст в области, които те свързват като математически структури - решения на уравнения на Янг-Бакстер за интегрируеми модели, спинови верижки, рационални конформни теории на полето, некомутативна геометрия на струните, теория на възлите. Те се проявяват съществено, където теорията на Ли има ограничена приложимост. За това могат да се смятат за пертурбации на дадена структура на симетрия, като квантови поправки или квантови деформации, зависещи от параметри и преминаващи в обикновената симетрия на Ли в съответна граница. Съществува убеждение, че квантовите групи ще доведат до по-задълбочено разбиране на симетриите и принципите на инвариантност по пътя към създаване на единна теория на всички взаимодействия. Некомутативните теории се развиват с цел построяване на смислена квантова теория на гравитацията. Некомутативните калибровъчни теории са в центъра на теорията на струните [32], където тяхното описание е свързано с трансформация на Зайберг-Уитен. Некомутативните теории се строят като деформирани варианти на съществуващи физически теории, които са ограничени и трудни за изучаване и приложение.



За особено интересен пример се смята усуканият модел на Егучи-Кавай [33, 34], който е създаден с цел изучаване границата при голямо  $N$  на теория на Янг-Милс [35], но по същество е първи пример за некомутативна калибровъчна теория. Предполага се, че некомутативните калибровъчни теории играят важна роля на връзка [36, 37] между калибровъчните теории при голямо  $N$  и струнните теории [38, 39].

Некомутативност, по не е езика на квантовата теория на полето се прилага и в статистическата физика, и теорията на кондензираната материя, например при обяснението на ефекта на Хол [40, 41].

Изучаването и приложението на некомутативни алгебрични структури към системи на неравновесната статистическа физика [42, 43] е интердисциплинарна област, и мотивираността за развитие на изследванията е двустранна. Най-напред е нужно да се подчертае, че комплексните системи със стохастична динамика се срещат навсякъде в природата - в биологията, процесите на реакция-дифузия във физиката и химията, процесите на транспортен поток, финансовите процеси, поведението на борсата, в икономиката. Особен теоретичен и експериментален интерес представляват процесите на реакция-дифузия [44, 45], които не само описват различни физични и химични явления, но са в основата на модели на комплексните системи. Процесът на асиметрична дифузия на частици с взаимодействие с просто изключване е с богата физика и широка гама от приложения, като биополимеризация, фазови преходи вследствие на гранични процеси, шокова динамика, транспорт през мембрани, трафик, биофизичен транспорт и др.

От друга страна е важно да се подчертае, че стохастичните процеси (т.е. процеси на Марков) върху решетка предоставят много добра възможност за приложение на некомутативните структури [46]. Тук квантовите групи възникват естествено и параметърът на деформация има пряк физически смисъл - за процесите на дифузия той е отношението на скоростта на вероятността за дифузия наляво и надясно. С тази интерпретация и връзка с интегрируемите модели на статистическата физика могат да се получат точни аналитични резултати за описание на стохастичната динамика.

Изследванията по стохастична динамика до голяма степен обхващат експериментално наблюдаеми неравновесни системи, които могат да бъдат моделирани с интегрируеми спинов верижки. Неравновесната физика още не е добре изучена и за изясняване на свойствата на отворените системи бе въведен [47, 48] метод на произведения по матрични състояния. Това е елегантен алгебричен метод, създаден за точно описание на стационарното състояние на стохастичните системи. Предимството на метода е, че всичките интересни физически величини и свойства като корелационни функции, токове, плътности, фазови диаграми се изчисляват точно посредством матричните представяния на квадратна алгебра, определена от динамиката на процеса. По този начин бе решен точно, в стационарното състояние, асиметричният процес с просто изключване. Заради богатата си физика и многобройните приложения той представлява фундаментален процес на неравновесната статистическа физика, така както моделът на Изинг е парадигма за критичните равновесни явления. Една от задачите за изследване, която първоначално разглеждахме, се отнася до свойствата на симетрия на квадратната алгебра, а именно, че квадратна-

та алгебра дефинира некомутативно пространство с квантова група на симетрия като това е симетрията в обема на процеса. По този начин се разкриват скритите симетрии на системата и тъкмо те са причина за възможността за връзка на процеса чрез трансформация на подобие с интегрируем Хамилтониан. Граничните процеси водят до поява на линейни членове в квадратната алгебра и нарушават симетрията в обема. Известна е значимостта на граничните условия за системи на неравновесната физика, за разлика от равновесните системи. Това е и водещата идея в настоящето изследване за обобщаване на квадратната алгебра до тридиагонален матричен подход, при което всички крайномерни и безкрайномерни матрични представяния на квадратната алгебра, известни от досегашните приложения се съдържат в представянията на тридиагоналната гранична алгебра. Граничната симетрия на неравновесния процес разкрива дълбоки алгебрични свойства на стохастичните модели, които са причина за точното решаване в стационарното състояние, но играят и ключова роля за интегрируемост чрез Бете-анализа за точно описание на динамиката на процеса. Тридиагоналният подход позволява единно описание на процеса с просто изключване и предоставя възможност за описание на процеси с повече видове частици.

Понятието интегрируемост в класическата механика е още от Лиувил. Класическият Хамилтониан на крайномерна система е напълно интегрируем, ако съществуват независими интеграли на движение, които комутират по отношение на скобите на Пуасон  $\{I_i, I_j\}$  и техният брой, (включващ и Хамилтониана) е равен на половината от размерността  $2N$  на фазовото пространство. Системата е суперинтегрируема, ако броят на интегралите на движение е по-голям от  $N$ . Обобщението на дефиницията на Лиувил за квантовия случай изисква съществуването на  $N$  комутиращи оператори  $[I_i, I_j] = 0$ , между които е и Хамилтонианът. Оказва се, че е трудно да се постигне задоволително ниво на строгост [49] и за това се приема, че една квантова система е интегрируема, ако е възможно да се изчислят точно някои физически величини, като например едновременно се диагонализират (т.е. да се намери спектъра) комутиращи интеграли на движение, или някои корелатори. Такава е основната идея на квантовия метод на обратната задача [50]. Този алгебричен подход използва като динамична симетрия за описание на интегрируемите модели, квадратни  $R$ -матрични алгебри и съществуването на набор от комутиращи трансфер матрици, които зависят от спектрален параметър.

Трансфер матриците водят до наличие на безброй много взаимно комутиращи, запазващи се товари, които могат да бъдат диагонализирани едновременно като пространството на общите собствени вектори, в повечето случаи, е крайномерно. По този начин, именно абелевата симетрия редуцира израждането на спектъра от безкрайност до краен и води до интегрируемост. Освен това много системи притежават неабелеви симетрии, които определят  $R$ -матрица, решение на уравнението на Янг-Бакстер, с точност до скаларен множител и се идентифицират като квантови симетрии в обем. Наличието на граници от най-общ вид води до нарушение на квантовата симетрия, както и на интегрируемостта на модела. Обаче при подходящо избрани гранични условия [51, 52] може да има остатъчни симетрии под форма на гранични скрити симетрии, които определят  $K$ -матрица, решение на граничното уравнение на Янг-Бакстер и водят до точна решаемост. За първи път нелокални запазващи се товари на гранична симетрия са намерени в модела на

синус-Гордон [53], след това са обобщени за афинни теории на полето на Тода [54], а за спиновите верижки са изведени от трансфер матрицата при специален избор на граничните условия [55] или аналогично като централен елемент на алгебра на Темпърли-Лийб [56]. Във всички случаи извеждането се основава на квантовата афинна симетрия в обема и известните гранични  $K$ -матрици. Нелокалните запазващи се товари са коидеали на квантовата симетрия в обема и се интерпретират като генериращи нова симетрия.

Ние дефинираме алгебрата на Аски-Уилсон като подалгебра със свойство на коидеал на квантовата афинна  $U_q(\widehat{sl(2)})$  симетрия. Чрез генераторите на алгебрата на Аски-Уилсон строим операторно-значна  $K$ -матрица, която удовлетворява граничното уравнение на Янг-Бакстер. Разглеждаме асиметричния процес с изключване, като пример за точно решаем модел на неравновесна физика и показваме, че граничните оператори са генератори на алгебра на Аски-Уилсон, чийто неприводими представяния са полиномите на Аски-Уилсон. Известно е, че моделът е еквивалентен на интегрируемата  $XXZ$  спинова верижка с периодични гранични членове (в подходяща параметризация), чийто Хамилтониан в обем на безкрайна верижка притежава  $U_q(\widehat{su(2)})$  квантова афинна симетрия. Предидущи резултати ([57]) за алгебричните съотношения за  $XXZ$  следват от алгебрата на Аски-Уилсон за неравновесния процес при специален избор на структурните константи.

Особено съществено се оказва, че афинните квантови теории на полето на Тода (частен случай на които е моделът на Синус-Гордон), спиновата  $XXZ$  верижка и многочастичната взаимодействаща система с поток върху ренетка притежават общи характерни структури, които ги обединяват. Това са квантовата афинна  $U_q(\widehat{sl(N)})$  (или  $U_q(\widehat{su(2)})$ ) симетрия в безкраен обем и нелокалните запазващи се товари, които генерират гранична алгебра на Аски-Уилсон, коидеал на квантовата група на симетрия в обема. Построяването чрез генераторите на алгебрата на Аски-Уилсон на операторно-значна матрица на отражение, удовлетворяваща граничното уравнение на Янг-Бакстер е дълбокото алгебрично свойство на тези модели, което води до тяхната интегрируемост. Това водеща навежда на връзка с решение на Бете анзатц.

Следвайки целта на изследването за точно решаване на големи  $N$ -частични системи, ние дефинираме за първи път, алгебра на Аски-Уилсон и тридиагонална алгебра с  $N$  генератори. Разглеждаме точно решение на спектрален проблем за система с гранична симетрия основана на алгебрата на Аски-Уилсон. Значимостта на алгебрата на Аски-Уилсон е, че един от генераторите се идентифицира с разностния оператор от втори ред за полиномите на Аски-Уилсон. Разностното уравнение за тези полиноми става еквивалентно на проблема за диагонализация на най-обща квадратична форма от генераторите на квантовата група на симетрия, интерпретирана по подходящ начин като Хамилтониан на съответна физическа система. Ние извеждаме процедура на диагонализация на матрица на преход (съответно Хамилтониан) чрез алгебричен Бете анзатц [58] и намираме пълния спектър за система върху ренетка, а именно асиметричния процес с просто изключване. Диагонализацията се осъществява чрез нетривиално прекъсване на безкрайно-мерното представяне на алгебрата на Аски-Уилсон чрез използване на нулите на полиномите на Аски-Уилсон. Това позволява построяване на крайно-мерно представяне на тридиагоналната алгебра, което е нов резултат. Алгебричната схема е достатъчно обща и може да бъде

прилагана и за друга система с гранична симетрия на Аски-Уилсон. Методът, който прилагаме е различен от [59], но важноста на полиномите на Аски-Уилсон за решението на асиметричния процес е изключване в стационарното състояние го прави най-подходящия за този неравновесен модел.

Разглеждаме и деформирани кубични алгебри заради приложението им за изучаване на методи на квантуване с обобщена статистика [60, 61]. Парастатистиката е фактор-алгебра [61] на алгебрата на Янг-Милс, която бе установено да възниква в матричния модел на теорията на струните [62]. Променливите на матричния модел са  $N \times N$  матрици и се идентифицират като ковариантни координати на некомутативна калибровъчна теория. Матриците участват в  $SU(N)$  инвариантно действие, от което за тях следват класическите уравнения на движения на Янг-Милс. По този начин операторите на Матричния модел, удовлетворяващи кубичните съотношения на уравненията на Янг-Милс, генерират асоциативна алгебра, т.н. наречената алгебра на Янг-Милс. Всяко решение на уравненията е представяне на алгебрата. Тези алгебри не са изучени още, нито техните представяния. Анализът и намирането на представянията ще обогати съвкупността от решения на уравненията на Янг-Милс, а това ще осветли доста проблеми свързани с отношението на некомутативните калибровъчни теории и теорията на струните.

Заслужава да споменем още, че връзката на многочастичната взаимодействаща система (или съответно квантовата спинова верижка) с интегрируемост чрез Бете анзатц е многообещаваща от гледна точка на перспективата на Бете анзатц в теорията на струните. Там интерес представляват затворените струни, но е по-лесно да се намери матрицата на разсейване върху безкрайната линия, като се използват асимптотични състояния. След това спектърът се получава чрез асимптотични уравнения на Бете и се апроксимира за система с краен размер [63, 64]. Изучаването на алгебра на Аски-Уилсон върху пръстен с периодични гранични условия, което е интересно само по себе си, ще бъде полезно за приложения върху струни с крайна дължина.

Ясно е, че изследването е следвало две направления. Първото е свързано с изучаването и развитие на някои въпроси от теорията на представяния на Ли алгебри, Ли супералгебри и некомутативни алгебрични структури като квадратни и кубични деформирани алгебри (на Хонф). Второто е приложение на получените резултати, както и известни свойства, и резултати от теорията на представянията за построяване, и анализиране на точно решаеми модели на взаимодействащи системи.

## Глава 1. Деформирани алгебри и супералгебри

Първата глава е посветена на изучаване на проблеми от теорията на деформираните алгебри и супералгебри, и техните представяния, както и на някои приложения. Изложението в нея се основава на работите [A1-A8], [A12-A13], [A17], [A22-A23] и [B1], [B4], [B15-B17].

Един от начините за дефиниция на т.н. квантови групи е  $q$ -деформация на универсалната обвиваща алгебра на Ли алгебрата на класическата група. Това значи построяване на

деформирана асоциативна алгебра със структура на некокомутативна алгебра на Хонф, което се задава в термините на генератори, удовлетворяващи деформирани комутационни съотношения.

В тази глава ние най-напред изучаваме реализация на квантовата група на Лоренц в термините на физически генератори, т.е. следваме класическата структура. Както е известно тя е следната: класическата група на Лоренц съдържа подгрупата  $SU(2)$ , локално изоморфна на групата на въртене  $M_i, i = 1, 2, 3$ , и генератори на буст  $N_i, i = 1, 2, 3$ , които образуват тримерен вектор, неприводимо представяне на  $SU(2)$ . От ротациите и бустовете се строят две кирални  $SL(2)$  подгрупи,  $I_i^L = M_i + iN_i$  и  $I_i^R = M_i - iN_i$ , чрез които групата на Лоренц се представи като  $SL^L(2) \times SL^R(2)$ . Предполагайки пълна аналогия с класическия случай, ние дефинираме квантовата група на Лоренц така, че да съдържа като подгрупа квантовата  $su_q(2)$  (деформация на универсалната обвиваща), генераторите на бустовете да се трансформират като неприводим  $q$ -тензорен оператор, фундаменталното представяне да запазва свойствата на двумерното спинорно представяне на Лоренц. За целта изхождаме от  $su_q(2)$  подгрупа с генератори  $M_{\pm}, M_3$ , удовлетворяващи

$$[M_+, M_-] = [2M_3], \quad [M_3, M_{\pm}] = \pm M_{\pm},$$

където  $[A]$  се дефинира като

$$[A] = \frac{q^{A/2} - q^{-A/2}}{q^{1/2} - q^{-1/2}}, \quad q \in \mathbb{R}.$$

В квантовия случай генераторите  $M_{\pm}, M_3$  не се трансформират по неприводимо представяне на  $su_q(2)$ . Използвайки дефиницията за неприводимо тензорно представяне [65] на квантовата  $su_q(2)$ , ние строим два  $q$ -векторни оператора  $S$  и  $T$ :

$$\begin{aligned} S_{\pm} &= \pm q^{\mp} M_{\pm} q^{-M_3/2}, \\ S_0 &= [2]^{-1/2} (q^{-1/2} M_- M_+ - q^{1/2} M_+ M_-) \end{aligned} \quad (1)$$

[(2), с.17, гл.1]

и

$$\begin{aligned} T_{\pm} &= \pm q^{\pm} M_{\pm} q^{M_3/2}, \\ T_0 &= [2]^{-1/2} (q^{1/2} M_- M_+ - q^{-1/2} M_+ M_-), \end{aligned} \quad (2)$$

[(3), с.17, гл.1]

чрез които изразяваме квантовите генератори на ротациите и бустовете. Получаваме квантовата група на Лоренц, записана чрез деформирани комутационни съотношения и с характерната особеност, че в комутационните съотношения между бустовете се появява и централен елемент на алгебрата. Това е  $q$ -аналогът на втория Казимир на Лоренц  $C_2'' = -M_i N_i, i = 1, 2, 3$ . Получаваме неприводимите представяния на квантовата група на Лоренц, които в границата  $q \rightarrow 1$  възпроизвеждат точно неприводимите представяния на класическата група на Лоренц.

Резултатът е следният: Неприводимите представяния на квантовата група на Лоренц се индексират с две числа  $([l_0], [l_1])$ , като  $l_0$  е неотрицателно цяло или полуцяло реално число и

$l_1$  е комплексно число, а. Неприводимото представяне, съответстващо на двойката  $([l_0], [l_1])$  в  $q$ -аналога на каноническия базис  $[j, m]_q$  на  $U_q(su(2))$ , се определя от формулите [(7-11), с.18,19, гл.1], и с коефициенти зададени с [(16), с.19, гл.1]. Ако, за дадено  $n$ , е изгъланено

$$[l_1]^2 = [l_0 + n + 1]^2, \quad (3)$$

[(17), с.19, гл.1]

представянето е крайномерно и възможните стойности на  $j$  и  $m$  са

$$j = l_0, l_0 + 1, \dots, [l_1] - 1, \quad m = -j, -j + 1, \dots, j. \quad (4)$$

[(19), с.19, гл.1]

Ако

$$[l_1]^2 \neq [l_0 + n + 1]^2, \quad (5)$$

[(21), с.20, гл.1]

представянето е безкрайномерно. б. Неприводимото представяне, определено от двойката  $[l_0], [l_1]$  е унитарно, ако или  $l_1$  е чисто имагинерно и  $l_0$  е произволно неотрицателно, цяло или полуцяло число, или  $l_0 = 0$  и  $l_1$  е реално число в интервала  $0 < |l_1| \leq 1$ . В границата  $q \rightarrow 1$  това са безкрайномерните унитарни представяния от главната и допълнителната серия.

Хопф структурата на квантовата група на Лоренц се доказва в базиса на  $q$ -аналога на представяне на квантовата група на Лоренц чрез две кирални подгрупи. Формулите за произведението на генераторите на квантовата група на Лоренц (виж формула [(32), с.22, параграф 1, гл.1] дефинират структурата на некомутативна алгебра на Хопф в квантовата група на Лоренц.

В резюме, получените резултати за квантова реализация на универсалната обвиваща на Ли алгебрата на групата на Лоренц означават, че всяко неприводимо представяне на класическата група на Лоренц, индексирано с числата  $l_0$  и  $l_1$  може да бъде деформирано до неприводимо  $q$ -представяне на деформираната алгебра на Лоренц, определено от  $q$ -числата  $[l_0]$  и  $[l_1]$ . Възможните стойности на  $l_0$  и  $l_1$  са точно същите, както в класическия случай.

В този параграф извеждаме и деформирана  $SU(2)$  супералгебра, която съдържа като четна подалгебра квантовата група  $U_q(su(2))$ . Извеждането на такава деформирана супералгебра осъществяваме чрез прилагане на  $q$ -обобщение на метода на Жордан-Швингер [66, 67]. За целта използваме два набора от  $q$ -осцилаторни оператори на раждане и униожение така, че генератори на деформираната алгебра са  $a_i, a_i^*, N_i$ . Такава деформация, с четна подалгебра не е известна, тъй като деформираната  $Osp(1, 2)$  супералгебра е дефинирана в базис на Шевалие [68], който е и обичайният начин за дефиниция на квантовите алгебри на Дринфелд-Джимбо. Предложената от нас деформирана супералгебра е удобна за приложения, и бе използвана за построяване за първи път на деформирани суперкохерентни състояния (L-M Kuang, J.Phys. A25 (1992) 4827).

В параграф 2 ние разглеждаме представяния с антикомутиращи параметри на алгебрата на суперконформната симетрия. Тази алгебра има като четна част подалгебрата

на обикновената конформна симетрия и два четириккомпонентни Майоранови спинора в качеството на паметни генератори. В [A1-A3] е получено пълно описание на безкрайномерната серия неприводими представяния на  $N = 1$  конформна суперсиметрия в пространството на суперполюта  $P_{(d,z)}^{\Sigma}(x, \theta^{\pm}, \xi^{\pm})$ , т.е. функции на координатите  $(x_{\mu}, \theta_{\alpha}^{\pm}, \xi_{\beta}^{\pm})$  на суперпространство, като  $x_{\mu}$  са обикновените комутиращи координати на пространството на Минковски и  $\theta_{\alpha}^{\pm}, \xi_{\beta}^{\pm}$  са грасмановите антикомутиращи (паметни) координати. Произволно представяне от тази серия се характеризира със своята Лоренцова структура  $\Sigma$  (определена от крайномерното спинорно представяне на Лоренц) и две числа  $(d, z)$ . Използвайки явния вид на генераторите на супералгебрата като диференциални оператори, ние решаваме система съответни диференциални уравнения за инвариантност на двуточковите и триточковите функции от конформни суперполюта. Резултатът е построяване в явен вид на двуточковите и триточковите функции на суперполюта: а) на суперполюта, които се трансформират по зададено представяне и по спрегнатото и б) на суперполюта, които се трансформират само по даденото (или само по спрегнатото представяне). От общия вид на дву-точковите и три-точковите функции следват частните случаи за неприводимите представяния на инвариантните подпространства. Тези функции бяха използвани в приложенията на суперконформните полени теории в теорията на суперструните и статистическата физика с мотивировката за обобщения на строгите математически резултати на двумерните конформни теории за по-високи размерности (J.H.Park, Nucl.Phys.B559 (1999) 455; H.Osborn, Ann.Phys.272 (1999) 243).

На края на параграфа разглеждаме няколко приложения: суперсиметрично уравнение на Шрьодингер с нерелативистична суперсиметрия, което има свойството, че Лоренцовата инвариантност възниква като динамична симетрия; суперсиметричен модел на кватерчетни и паметни супердеформирани ядра; нелинейна реализация на скалярно суперполе с цел бозонизация на спинорно суперполе на Тиринг и като следствие от по-високата симетрия отсъствие на ренормировка и за обикновения модел на Тиринг.

В трети параграф разглеждаме кубична алгебра на деформирана парастатистика. Както вече писахме, интересът към парастатистиката се възобнови с това, че в матричния модел на некомутативна калибровъчна теория възниква алгебра на Янг-Милс, която има две фактор алгебри, а именно алгебрите на Бозе- и Ферми-парастатистика. Парастатистиката беше въведена от Грийн [69] като обобщен метод на квантуване, различен от каноничния, който се основава на трилинейни съотношения за две съвкупности от оператори на раждане и унищожение. Обобщената статистика се характеризира с порядък на параквантуването  $p$ , който разграничава двете съвкупности като парабозе и параферми алгебри. Физическата интерпретация на цялото число  $p$  е, че в случая на парабозони това е максималният брой частици, които могат да заемат антисиметрично състояние, докато за парафермиони това е максималният брой частици, които могат да заемат симетрично състояние. Състоянията съответстват на представяния на симетричната група  $S_n$ , задавани чрез диаграми на Юнг с максимален брой  $p$  на редове за парабозони и стълбове за парафермиони. Стойността  $p = 1$  съответства на обикновената Бозе-Ферми статистика.

Известно е че параферми алгебрата  $p\mathfrak{F}(n)$  е изоморфна на универсалната обвиваща алгебра на ортогоналната алгебра  $so(2n + 1)$ , а парабозе алгебрата е изоморфна на уни-

версализирана обвиваща алгебра на ортосимплектичната супералгебра  $osp(1|2n)$

$$\mathfrak{p}\mathfrak{F}(n) \simeq U(so(2n+1)) \quad \mathfrak{p}\mathfrak{B}(n) \simeq U(osp(1|2n))$$

В работа [A17] е дефинирана деформирана алгебра на нарастатистика чрез "квантуване" на тези изоморфизми, т.е. деформиране на тризвезийните съотношения по такъв начин, че възникналите деформирани параферми  $\mathfrak{p}\mathfrak{F}_q(n)$  и парабозе  $\mathfrak{p}\mathfrak{B}_q(n)$  алгебри да са изоморфни на съответните деформирани универсални обвиващи алгебри

$$\mathfrak{p}\mathfrak{F}_q(n) \simeq U_q(so(2n+1)) \quad \mathfrak{p}\mathfrak{B}_q(n) \simeq U_q(osp(1|2n))$$

Предимните резултати (виж реф.[6-9] в [A17]) по деформирана нарастатистиката са разширени с добавяне на хомогенни съотношения. Алгебричният изоморфизъм е продължен до Хонф морфизъм, което определя по естествен начин Хонф структура на деформираната алгебра на нарастатистика. Технически съществено се оказва смяната на базиса на Шевалие, съответстващ на простите корени  $\alpha_i$ , с базис използващ късите корени  $\varepsilon_i$ , при което генераторите на Картан стават

$$H_i = h_i - h_{i+1} \quad 1 \leq i \leq n-1, \quad H_n = h_n. \quad (6)$$

[(52), с.29, гл.1]

а стълбичните оператори са съответно,  $a^{+i}$  и  $a_j^-$

$$a^{+i} = [E_i, [E_{i+1}, \dots [E_{n-1}, E_n]_{q^{-1}} \dots]_{q^{-1}}]_{q^{-1}} \quad (7)$$

$$a_j^- = [[\dots [E_{-n}, E_{-n+1}]_q \dots, E_{-(i+1)}]_q, E_{-i}]_q. \quad (8)$$

[(53), (54), с.30, гл.1]

Например, за копронизведенното  $\Delta$  получаваме

$$\Delta q^{\pm h_i} = q^{\pm h_i} \otimes q^{\pm h_i} \quad (9)$$

[(67), с.32, гл.1]

$$\begin{aligned} \Delta a^{+i} &= a^{+i} \otimes 1 + q^{h_i} \otimes a^{+i} + \omega \sum_{i < j \leq n} [a^{+i}, a_j^-] \otimes a^{+j} \\ \Delta a_i^- &= a_i^- \otimes q^{-h_i} + 1 \otimes a_i^- - \omega \sum_{i < j \leq n} a_j^- \otimes [a^{+j}, a_i^-], \end{aligned} \quad (10)$$

[(68), с.32, гл.1]

от където следват и съотношенията на деформирания Грийн алгатац (виж формули [(87 - 92), с.35, 36, гл.1]).

Съществено за приложенията към многочастични системи се оказва кубичната алгебра на Аски-Уилсон, въведена от А.Жеданов [70] и разглеждана във връзка с по-обща тридиагонални алгебри [71], чиято теория интензивно се развива в последните години.



Нетривиалното при задаването на алгебра на Аски-Уилсон е, че структурните константи зависят от представянето. Ние дефинираме [A23] алгебрата на Аски-Уилсон с два генератора чрез хомоморфизъм в афинната квантова група  $U_q(\widehat{sl(2)})$ , след което обобщаваме хомоморфизма за случай на  $N \geq 3$ . Тази връзка е в духа на споменатите в увода нелокални запазващи се товари, които възникват като елементи на подалгебра - коидеал, при наличие на гранични условия за модели с афинната квантова  $U_q(\widehat{sl(N)})$  и обема. В подточка 4.1 изхождаме от дефиницията на последната като асоциативна алгебра с единица и генератори  $E_i^\pm$  и  $q^{H_i}$ ,  $i = 0, 1, \dots, N-1$ , в базис на Шевалие, със съответни комутационни съотношения ( $0 < q < 1$ ), от които за нас са съществени квантовите съотношения на Сер

$$\sum_0^{1-a_{ij}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ r \end{bmatrix}_q (E_i^\pm)^r E_j^\pm (E_i^\pm)^{1-a_{ij}-r} = 0, \quad (11)$$

[(97), с.37, гл.1]

където

$$\begin{bmatrix} m \\ r \end{bmatrix}_q = \frac{[m]!}{[r]![(m-r)]!}, \quad (12)$$

[(98), с.37, гл.1]

както и произведението  $\Delta$

$$\begin{aligned} \Delta(E_i^+) &= E_i^+ \otimes q^{-H_i/2} + q^{H_i/2} \otimes E_i^+, \\ \Delta(E_i^-) &= E_i^- \otimes q^{-H_i/2} + q^{H_i/2} \otimes E_i^-, \\ \Delta(H_i) &= H_i \otimes I + I \otimes H_i. \end{aligned} \quad (13)$$

[(99), с.37, гл.1]

С крайномерно представяне на афинната квантова група  $U_q(\widehat{sl(N)})$  се асоциира квантова  $R$ -матрица  $R^{VV}(\lambda)$ , която действа в  $V \otimes V$  и удовлетворява квантовото уравнение на Янг-Бакстер. Универсалната  $R$ -matrix  $R(\lambda)$  [72] се определя от гърбите членове в разложението по степените на генераторите на Шевалие на  $U_q(\widehat{sl(N)})$ , а именно

$$R = q^{cscd+dscs+\sum_{i=0}^{N-1} H_i \otimes H^i} \left( 1 \otimes 1 + (q^{1/2} - q^{-1/2}) \sum_{i=0}^{N-1} q^{H_i/2} E_i^+ \otimes q^{-H_i/2} E_i^- + \dots \right). \quad (14)$$

[(102), с.37, гл.1]

За фиксирано крайномерно представяне  $(\pi, V)$  на фактор-алгебрата на  $U_q(\widehat{sl(N)})$ , получена чрез полагането на  $c = 0$ , е извлечено  $R^{VV}(\lambda) = (\pi \otimes \pi)R(\lambda)$ . За нашето изследване са важни квантовите токове  $L^\pm(\lambda) \in \text{End} V \otimes U_q(\widehat{sl(N)})$ , зададени като  $L^+ = (id \otimes \pi_V)(R)$ ,  $L^- = (id \otimes \pi_V)(R^t)$ . Операторите  $L^\pm(\lambda)$  са генератори на алгебра на Хопф  $A(R)$  като техните матрични коефициенти генерират алгебрата  $A_0(R) \subset A(R)$ . Нека с  $L(\lambda)$  е означен квантовия ток

$$L(\lambda) = L^+(\lambda q)(L^-(\lambda))^{-1} \quad (15)$$

[(104), с.38, гл.1]

с разложение в краен ред на Лоран

$$L(\lambda) = \sum_n l_n(n) \lambda^{-n-2}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (16)$$

[(105), с.38, гл.1]

Теоремата на Ренетикин и Семьонов-Тян-Шански [72] гласи, че елементът  $l(\lambda) = \text{tr}_q(L(\lambda))$  принадлежи на центъра на фактор-алгебрата на  $A(R)$ , получена чрез полагането  $c = -h$ .

За целите ни преминаваме към по-различна реализация на  $U_q(\widehat{sl}(N))$  чрез базис  $H_i, Q_i^s, \overline{Q}_i^s$ , които са линейна комбинация на генераторите на Шевалие  $H_i, Q_i^s, \overline{Q}_i^s$

$$Q_i^s = (q^{1/2} - q^{-1/2}) E_i^+ q^{-H_i/2} + q^{-H_i}, \quad \overline{Q}_i^s = -(q^{1/2} - q^{-1/2}) E_i^- q^{-H_i/2} + q^{-H_i}. \quad (17)$$

[(106), с.38, гл.1]

При зададени скалари (най-общо комплексни)  $u_i, v_i, i = 0, \dots, N-1$  образуваме

$$U_i = u_i Q_i^s, \quad V_j = v_j \overline{Q}_j^s, \quad (18)$$

[(107), с.38, гл.1]

(няма сумиране по повтарящи се индекси), за които са изгълнени следните съотношения

$$q^{1/2} V_i U_i - q^{-1/2} U_i V_i = (q^{1/2} - q^{-1/2}) v_i u_i, \quad (19)$$

$$q^{1/2} U_i V_{i+1} - q^{-1/2} V_{i+1} U_i = (q^{1/2} - q^{-1/2}) u_i v_{i+1} q^{-H_i/2 - H_{i+1}/2}, \quad (20)$$

$$q^{1/2} U_{i+1} V_i - q^{-1/2} V_i U_{i+1} = (q^{1/2} - q^{-1/2}) u_{i+1} v_i q^{-H_i/2 - H_{i+1}/2}. \quad (21)$$

[(108-110), с.38, гл.1]

Образуваме линейните комбинации

$$A_i = U_i + V_i, \quad (22)$$

[(117), с.39, гл.1]

за които следват съотношения, които за всяка двойка  $A_i, A_{i+1}$  са съотношения на тридиагонална алгебра

$$\begin{aligned} A_i^3 A_{i+1} - [3]_q A_i^2 A_{i+1} A_i + [3]_q A_i A_{i+1} A_i^2 - A_{i+1} A_i^3 &= u_i v_i (q - q^{-1})^2 [A_i, A_{i+1}], \\ A_{i+1}^3 A_i - [3]_q A_{i+1}^2 A_i A_{i+1} + [3]_q A_{i+1} A_i A_{i+1}^2 - A_i A_{i+1}^3 &= u_{i+1} v_{i+1} (q - q^{-1})^2 [A_{i+1}, A_i], \end{aligned} \quad (23)$$

[(118), с.39, гл.1]

където  $[3]_q = q + q^{-1} + 1$  и  $[X, Y] = XY - YX$ .

В подточка 4.2 най-напред даваме някои дефиниции от теорията на тридиагоналните алгебри. След това дефинираме алгебрата на Аски-Уилсон с два генератора като кондеал на  $U_q(\widehat{sl}(2))$  и определяме в явен вид структурните константи (виж формули [(125-131), с.41, гл.1]).

Случаят на алгебра на Аски-Уилсон с два генератора има особеността, че структурните константи на алгебрата зависят от квадратичния Казимир, който съгласно теоремата на Ренетикин-Тяп-Шански съществува на критично ниво  $c = -1$ . Явният вид на структурните константи е такъв, че съответните  $\omega$  и  $\eta$  зависят от коефициента  $l_V(0)$  в разложението на квантовия ток (16) при  $n = 0$ . Следващата от нея тридиагонална алгебра с два генератора, дефинираме като деформация на квантовите  $q$ -сътношения на Сер на афинната квантова симетрия на ниво нула, в резултат на която стойността на централния елемент става  $c = -1$ .

По-нататък, в подточка 4.3 ние дефинираме алгебрата на Аски-Уилсон с  $N$  генератори чрез хомоморфизъм в афинната квантова  $U_q(sl(N))$ . При зададени скалари  $u_i, v_i, k_i, i = 0, \dots, N-1$  и генератори в базис на Шевалие, операторите  $A_i, i = 0, \dots, N-1$ , дефинирани като

$$A_i = u_i E_i^+ q^{-H_i/2} + v_i E_i^- q^{-H_i/2} + k_i q^{-H_i}, \quad i = 0, \dots, N-1 \quad (24)$$

[(134), с.42, гл.1]

образуват алгебра, а именно алгебра на Аски-Уилсон с  $N$  генератори, удовлетворяващи съотношенията

$$[A_i, A_j] = 0, \quad |i - j| \geq 2, \quad i, j = 0, \dots, N-2, \quad (25)$$

$$\begin{aligned} [[A_i, A_{i+1}]_q, A_i]_q &= -\rho_i A_{i+1} - \omega_{i+1} A_i - \eta_i^{i+1}, \\ [A_{i+1}, [A_i, A_{i+1}]_q]_q &= -\rho_{i+1} A_i - \omega_{i+1} A_{i+1} - \eta_{i+1}^i \end{aligned} \quad (26)$$

[(136), с.42, гл.1]

като  $i = 0, \dots, N-2$  и

$$\begin{aligned} [[A_0, A_{N-1}]_q, A_0]_q &= -\rho_0 A_{N-1} - \omega_0 A_0 - \eta_0^{N-1}, \\ [A_{N-1}, [A_0, A_{N-1}]_q]_q &= -\rho_{N-1} A_0 - \omega_0 A_{N-1} - \eta_{N-1}^0, \end{aligned} \quad (27)$$

[(137), с.42, гл.1]

където  $[A_i, A_j]_q$  е  $q$ -комутатор

$$[A_i, A_j]_q = q^{1/2} A_i A_j - q^{-1/2} A_j A_i, \quad 0 \leq i, j \leq N-1. \quad (28)$$

[(138), с.43, гл.1]

Структурните константи зависят от представянето

$$-\rho_i = u_i v_i (q - q^{-1})^2, \quad (29)$$

$$\omega_{i+1} = (q^{1/2} - q^{-1/2})^2 k_i k_{i+1} q^{-\mu(i) - \mu(i+1)}, \quad (30)$$

$$\eta_i^{i+1} = (q - q^{-1})^2 u_i v_i k_{i+1} q^{-2\mu(i) - \mu(i+1)}, \quad \eta_{i+1}^i = (q - q^{-1})^2 u_{i+1} v_{i+1} k_i q^{-2\mu(i+1) - \mu(i)} \quad (31)$$

[(139-141), с.43, гл.1]

и  $\omega_0, \eta_0^{N-1}, \eta_{N-1}^0$  следват от (30) и (31) със смяната  $i \rightarrow 0, (i+1) \rightarrow (N-1)$ . Представянето е тип 1 [73]  $V = \oplus_\mu V_\mu$ , индексирано с тегла  $V_\mu = (\nu \in V | H\nu = q^{\mu(i)} \nu)$  и е общо собствено пространство на комутиращи оператори  $q^{H_i}, i = 0, \dots, N-1$ .

От съотношенията (26) следват следните съотношения

$$\begin{aligned} [A_i[A_i[A_i, A_{i+1}]_q]_{q^{-1}}] &= \rho_i[A_i, A_{i+1}], \\ [A_{i+1}[A_{i+1}[A_{i+1}, A_i]_q]_{q^{-1}}] &= \rho_{i+1}[A_{i+1}, A_i] \end{aligned} \quad (32)$$

[(149), с.44, гл.1]

и съответните съотношения със смяната  $i \rightarrow 0, (i+1) \rightarrow (N-1)$  [(150), с.29, гл.1], където  $[A_i, A_j] = 0, |i-j| \geq 2$ . Хомоморфизмът (24) позволява да се установи, че алгебрата на Аски-Уилсон и тридиагоналната алгебра са със свойството на коидеали на  $U_q(\widehat{sl}(N))$ .

В подточка 4.4 ние даваме в резюме основни положения от теорията на представяния [70, 74] на алгебрата на Аски-Уилсон с два генератора, която ще бъде съществено използвана за точно решаване на модел на неравновесна физика в гл.3. Неприводимите представяния се строят в пространството на симетрични полиноми на Лоран, където базис са полиномите на Аски-Уилсон.

## Глава 2. Системи с голямо $N$

Втората глава включва проблеми по т.н. модели на голямо  $N$ , във връзка с некомутативни калибровъчни теории и нелинейни системи с голям брой степени на свобода, чийто нелинейни ефекти на поведение са обусловени от интегрируеми гранични условия. В основата ѝ са залегнали работите [A9-A11], [A14], [A25], [B2], [B4].

Когато се разглеждат проблеми на математическата физика, много често се оказва, че могат да се използват подобни идеи и методи в различни области на физиката. Има няколко обединяващи теми в настоящото изследване, най-очевидната от които е използването на симетрии. Редуцираният усукан кирален модел [75, 33], който напоследък се обсъжда във връзка с некомутативните калибровъчни теории, е всъщност инонерски модел като приложение на деформирани симетрии [76, 77]. Тези модели се появяват през осемдесетте години почти едновременно и независимо от възникването на квантовите групи в контекста на интегрируемите модели на школата в Петербург. С тях се целеше изучаване на свойствата при голямо  $N$  на калибровъчни и спинови системи върху решетка, за които разложението  $1/N$  представлява ефикасен подход. В нашия разглеждане на кирални модели върху решетка ние използваме деформирани  $SU(N)$   $\gamma$  матрици. Построеният редуциран кирален модел в границата на голямо  $N$  е еквивалентен на изходния (безкраен обем) ренетъчен кирален модел, като съответствието се установява с помощта на уравненията на Швингер-Дайсон и не зависи от константата на връзката.

От по-различна гледна точка разглеждаме ансамбъл при голямо  $N$ , който е свързан с квантов хиперболически Хамилтониан, съответстващ класически на Хамилтонов поток, известен още като динамика на Риман. Статистиката на собствените стойности следва собствените стойности на случайна матрица. Ние даваме геометрична интерпретация на условие на квантуване на хиперболическа динамична система в рамките на конформната теория на представяния. В края на тази глава правим обзор на известни модели от теорията на полето, които притежават афинна квантова симетрия в обема, интегрируеми

гранични условия и са богати на солитони. Обусловеното от солитони нелинейно поведение е свързано с безкрайно много нелокални запазващи се интеграли на движение, което осигурява пълната интегрируемост. Ние обсъждаме тези модели, за да покажем, че от гледна точка на нашето изследване, запазващите се товари, които са били получени като коидали на квантовата афинна симетрия, са генератори на алгебра на Аски-Уилсон. По този начин установяваме обща характеристика на афинните теории на полето на Тода, от една страна, а от друга на синновата  $XXZ$  верижка и на многочастична система с поток върху решетка, което ни насочва към единен подход за изучаване.

Първият параграф е посветен на изучаване границата на голямо  $N$  на модели с  $U(N)$  симетрия върху решетка. Изходният кирален модел върху решетка се дефинира със следните статистическа сума и действие

$$Z(\beta) = \int \prod_{x \in L} dU_x e^{-S(\beta)}, \quad (33)$$

[(13), с.53, гл.2]

$$S(\beta) = -\beta N \sum_{x \in L} \sum_{\mu=1}^d \text{tr}(U_x U_{x+\mu}^+ + U_{x+\mu} U_x^+), \quad (34)$$

[(14), с.53, гл.2]

където  $\beta N \equiv \frac{1}{T}$ , а най-общият вид на Гриновата функция за такава теория е

$$\Gamma\{x_i, k_i\} = \langle \text{tr}(\prod_{i=1}^n U_{x_i}^{k_i}) \rangle. \quad (35)$$

[(15), с.53, гл.2]

Съответно редуцираният усукан кирален модел се дефинира чрез статистическата сума

$$Z_R(\beta) = \int dU e^{-S(\beta)}, \quad (36)$$

[(18), с.54, гл.2]

$$-S(\beta) = \beta N \sum_{\mu} \text{tr}(U \gamma_{\mu} U^+ \gamma_{\mu}^+ + U \gamma_{\mu}^+ U^+ \gamma_{\mu}) \quad (37)$$

[(19), с.54, гл.2]

като ние избираме матриците  $\gamma$  да удовлетворяват

$$\gamma_{\mu} \gamma_{\nu} = \exp \frac{2i\pi}{N^{2/d}} \gamma_{\nu} \gamma_{\mu}. \quad (38)$$

[(20), с.54, гл.2]

При този специален избор  $N^{2/d}$  е цяло число и това е конкретен начин за доближаване на границата при голямо  $N$ , друг възможен избор няма да повлияе на резултатите.

Действието на редуцирания усукан модел притежава два вида инвариантност :  
(i) -  $U(1)$  инвариантност

$$U \rightarrow e^{i\theta} U, \quad (39)$$

[(27), с.55, гл.2]  
(ii)

$$U \rightarrow V(a)UV^+(a), \quad (40)$$

[(28), с.55, гл.2]  
с

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n), \quad a_i \in \mathbb{Z}_{N^{2/d}}.$$

Първата симетрия е свойство на оригиналния модел в континуум и на редуцирания. Втората симетрия е дискретна и може да се разглежда като симетрия на началната решетка, което показва, че редуцираният модел не зависи от началната точка.

С помощта на матриците на усукване и като използваме само дискретната инвариантност, ние доказваме взаимно еднозначно съответствие между Гриновите функции на редуцирания и нередуцирания кирални модели. Уравненията на Швингер-Дайсон за редуцирания модел се получават като съвкупността от уравнения

$$N \langle \text{tr} G \rangle + \beta N \sum_{\pm \mu=1}^d \left( \langle \text{tr} U \gamma_\mu U^\dagger \gamma_\mu^\dagger G \rangle - \langle \text{tr} \gamma_\mu^\dagger U \gamma_\mu U^\dagger G \rangle \right) + \langle \text{source terms} \rangle = 0. \quad (41)$$

[(29), с.55, гл.2]

Съответствието между членовете, които не са тип "източник" в уравнения на Швингер-Дайсон на редуцирания и нередуцирания модел се установява веднага. Обаче в уравненията на Швингер-Дайсон на редуцирания модел възникват допълнителни членове на източник като следствие от процедурата на редукция. Ние доказваме, че тези допълнителни членове в границата на голямо  $N$  се анулират. С това съответствието се доказва, като то е в сила за произволна четна размерност на пространството и не зависи от константата на връзката.

Във втория параграф разглеждаме квантов ермитов оператор (оператора на Риман), който се асоциира с класически едномерен хиперболичен Хамилтониан

$$H_d(x, p) = xp, \quad (42)$$

[(35), с.57, гл.2]

където  $x$  и  $p$  са спрянатите координата и импулс. За квантовият оператор бе показано от Бери и Кийтинг [78, 79], че неговите собствени стойности са реалните решения  $E_n$  на

$$\zeta(1/2 + iE_n) = 0, \quad (43)$$

[(34), с.57, гл.2]

като те предлагат условие за квантуване за тези реални собствени стойности, което генерира нулите на функцията на Риман. Ние интерпретираме [A14] предложеното условие

за квантуване като гранично условие на хиперболична динамична система в рамките на конформна геометрия. Квантовият Хамилтониан представлява оператор на дилатациите на конформната група. Координатните собствени функции са автоморфни функции, инвариантни по отношение на дискретната група на отражения на Вайл за точките върху хиперболични траектории с постоянна енергия във фазовото пространство. Използвайки дискретната симетрия на днешъра извеждаме условие на квантуване [(70), с.67, гл.2], което е точно условието на Бери и Кийтинг.

В третия параграф правим преглед на афинните теории на Тода [54] върху полуируса, най-простият случай на които е моделът на синус-Гордон върху полуируса, както и интегрируемата спинова верижка XXZ [57] с най-обща педиагонални гранични членове. Ние показваме, че получените нелокални запазващи се товари, които бяха намерени като обекти със свойства на кондеали по отношение на афинната симетрия, генерират алгебра на Аски-Уилсон. Това е преход към следващата глава, където извеждаме важния резултат, че граничните оператори на модела на неравновесна физика върху решетка също генерират алгебра на Аски-Уилсон със свойството на кондеали по отношение на симетрията в обема. Ще приведем резултатите за структурните константи

-модел на синус-Гордон

$$\begin{aligned}\widehat{Q}_- &= Q_- + \overline{Q}_+ + \widehat{e}_- q^{-T}, \\ \widehat{Q}_+ &= Q_+ + \overline{Q}_- + \widehat{e}_+ q^T,\end{aligned}\tag{44}$$

[(83), с.69, гл.2]  
където

$$\widehat{e}_\pm = \frac{\lambda_b \widehat{e}_\pm (1 - \beta^2)}{2\pi \beta^2},\tag{45}$$

[(84), с.69, гл.2]

се запазват и са кондеали спрямо  $U_q(\widehat{sl}_2)$ . Всъщност това са точно генераторите на алгебра на Аски-Уилсон

$$A = Q_+ + \overline{Q}_- + \widehat{e}_+ q^T, \quad A^* = Q_- + \overline{Q}_+ + \widehat{e}_- q^{-T},\tag{46}$$

[(85), с.69, гл.2]

със структурни константи (съответстващи на стойността  $I_V^0 = q^{1/2} + q^{-1/2}$ )

$$\rho = \rho^* = -(q - q^{-1})^2,\tag{47}$$

$$\omega = (q^{1/2} - q^{-1/2})^2 (\widehat{e}_+ \widehat{e}_- + (q^{1/2} + q^{-1/2})^2),\tag{48}$$

$$\eta = \eta^* = (q - q^{-1})^2 (\widehat{e}_+ + \widehat{e}_-).\tag{49}$$

[(86-88), с.69, гл.2]

- афинна теория на полето на Тода

$$\widehat{Q}_i = Q_i + \overline{Q}_i + \widehat{e}_i q^{T_i}, \quad \widehat{e}_i = \frac{\lambda_b \widehat{e}_i (1 - \beta^2)}{2\pi c \beta^2}, \quad i = 0, \dots, N-1.\tag{50}$$

[(98), с.70, тл.2]

Нелокалните запазвания се товари на афинната теория на Тода генерират алгебра на Аски-Уилсон с  $N$  генератори и структурни константи от вида (няма сумиране по повтарящи се индекси)

$$\rho_i = \rho_{i+1} = -(q - q^{-1})^2, \quad (51)$$

$$\omega_{i+1} = (q^{1/2} - q^{-1/2})^2 \widehat{e_i e_{i+1}} q^{-\mu(i) - \mu(i+1)}, \quad (52)$$

$$\eta_i^{i+1} = (q - q^{-1})^2 \widehat{e_{i+1}} q^{-2\mu(i) - \mu(i+1)}, \quad \eta_{i+1}^i = (q - q^{-1})^2 \widehat{e_i} q^{-2\mu(i+1) - \mu(i)}. \quad (53)$$

[(99-101), с.70, тл.2]

### Глава 3. Многочастични системи точно

Глава 3 е най-съществена част на настоящето изследване, а именно приложение на деформирания симетриен към многочастични взаимодействия системи със стохастична динамика в рамките на алгебричен подход. Основава се върху работите [A15-A16], [A18-A25], [B7-B17].

Ние прилагаме теорията на представянията на  $U_q(\widehat{su(2)})$  и  $U_q(\widehat{su(2)})$ , както и на граничната алгебра на Аски-Уилсон, и на тридиагонална алгебра, за формулиране на алгебричен подход за точно решаване на модел на неравновесна физика. Изходен пункт е матричният подход към стационарното състояние на стохастичната динамика, който бе игнориран от метода на обратната задача със интегрируеми модели.

Ние обобщаваме матричния подход [47] до подход на тридиагонална алгебра, който позволява не само точно решение в стационарното състояние, но и точно описание на динамиката на системата. Разглеждаме трите случая на отворен многочастичен процес с просто изключване - частично асиметричния, пълно асиметричния и симетричния, и изследваме свойствата на симетрия, и следствията за точно решаване. Тридиагоналният подход позволява единно описание на трите процеса. Извеждаме алгебрата в обема за асиметричния процес като изоморфна на  $q$ -съотношенията на Сер за нулево ниво на  $U_q(\widehat{su(2)})$ , което показва, че квантовата афинна симетрия се явява скрита симетрия в обема. Оттук веднага следва, че граничната алгебра се дефинира като алгебра на Аски-Уилсон, идеал на  $U_q(\widehat{su(2)})$ . Ние получаваме тази алгебра и следващата от нея тридиагонална алгебра, като определяме структурните константи чрез параметрите на модела. Съответните резултати за симетричния процес се получават в границата  $q = 1$ . Граничната алгебра на симетричния процес разбираме във вида на съотношенията на Долан-Гради [80], с помощта на които строим нелокални запазвания се товари за процеса. В деформирания случай строим операторно-значна матрица, решение на граничното уравнение на Янг-Бакстер. Прилагаме процедура на алгебричен Бете Анзатц и получаваме диагонализация на матрицата на преход на процеса с помощта на крайномерно представяне на тридиагоналната гранична алгебра. Диагонализацията използва свойствата на разностния оператор от втори ред за полиномите на Аски-Уилсон и процедурата би могла да се приложи, и за друга система с гранична симетрия на Аски-Уилсон с подходяща интерпретация. Предимство



на тридиагоналния подход е и възможността за приложение към процеси с повече видове частици.

В началния параграф на глава 3 привеждаме общи понятия за стохастична динамика. Стохастичен процес върху решетка се описва с вероятностно разпределение  $P(s_i, t)$  на стохастична променлива,  $s_i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ , асоциирана с всеки възел  $i = 1, 2, \dots, L$  на линейна верижка. Съвкупността от числата (на запълване)  $s_i$  определя състоянието върху решетката в момент от време  $t$  и вероятността за преминаване към друга конфигурация  $s'_i$ , за безкрайно-малко време  $dt$ , е  $\Gamma(s, s')dt$ . Скоростите на вероятността  $\Gamma \equiv \Gamma_{jl}^{ik}$ ,  $i, j, k, l = 0, 1, 2, \dots, n-1$  не зависят от мястото в обема. На двете граници, т.е. възлите 1 и  $L$ , са възможни гранични процеси със скорости на вероятност, съответно  $L_i^j$  и  $R_i^j$ ,  $i, j = 0, 1, 2, \dots, n-1$ . Поради запазване на вероятността е изпълнено

$$\Gamma(s, s) = - \sum_{s' \neq s} \Gamma(s', s). \quad (54)$$

[(1), с.75, гл.3]

Динамиката на стохастичната система се подчинява на мастер-уравнение, линейно по времето

$$\frac{dP(s, t)}{dt} = \sum_{s'} \Gamma(s, s')P(s', t), \quad (55)$$

[(2), с.75, гл.3]

което може да бъде преобразувано в уравнение на Шрьодингер с имагинерно време, за квантов Хамилтониан на взаимодействие на близки съседи в обем и с гранични членове

$$\frac{dP(t)}{dt} = -HP(t), \quad (56)$$

[(3), с.75, гл.3]

където  $H = \sum_j H_{jj+1} + H^{(L)} + H^{(n)}$ . Основното състояние на този Хамилтониан съответства на стационарното състояние на стохастичната система. По този начин се прави връзка с интегрируеми квантови спинови верижки и могат да се получат точни резултати за стохастичната система. Развитият от нас алгебричен подход позволява *независимо* описание на стохастичната динамика чрез диагонализация на матрицата на преход.

За изучаване на свойствата на многочастични стохастични системи в стационарно състояние бене предложен метод на матричните произведения [47, 48]. Идеята е, че всички стационарни свойства могат да се опишат чрез матрици, удовлетворяващи квадратна алгебра  $\Gamma_{jl}^{ik} D_l D_k = x_l D_j - x_j D_i$ ;  $i, j, k = 0, 1, \dots, n-1$ . Ние изхождаме от този метод конкретно за процеса с просто изключване [44, 45].

Във втори параграф описваме процеса и метода на матричните произведения. Разглеждаме дифузионни процеси с  $n$  вида частици върху верижка с  $L$  възли, с взаимодействие на близки съседи с просто изключване, което означава, че възелът е или празен, или зает от частица от даден вид. В съвкупността от числа на запълване  $(s_1, s_2, \dots, s_L)$ , характеризираща дадена конфигурация,  $s_i = 0$ , ако възелът  $i$  е празен,  $s_i = 1$ , ако във възела  $i$  има

частица от  $i$ -ви вид,  $s_i = n - 1$ , ако във възела  $i$  има частица от  $(n - 1)$ -ви вид. Матрицата (на преход) на скоростите на вероятността има вида  $\Gamma_{ki}^k = g_{ik}$ , с  $i, k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ . Частичите прескачат между два съседни възела с вероятност  $g_{ik}dt$  наляво и  $g_{ki}dt$  надясно, като  $i, k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$  и  $i < k$ . Процесът е симетричен, ако скоростта на вероятността е постоянна  $g_{ik} = g_{ki} = g$ ; пълно асиметричен, ако всички скокове са само в една посока и частично асиметричен, ако скоростта на вероятността  $g_{ik}$  за движение наляво е различна от тази за движение надясно  $g_{ki}$ . Броят на частиците от всеки вид в обема се запазва  $\sum_{i=0}^{n-1} n_i = L$ , както и при периодични гранични условия  $s_{L+i} = s_i$  за система върху пръстен. При отворена система решетъчният газ от частици е свързан с външни резервоари от частици с постоянна плътност и се индуцират фазови преходи от граничните процеси, когато частица от вид  $k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n - 1$  се внася и/или изважда съответно със скорост  $L_k^0$ ,  $L_k^k$  в началото на верижката, и се изважда и/или внася съответно със скорост  $R_0^k$ ,  $R_k^k$  в края на верижката.

Квадратната алгебра на  $n$ -частичните дифузионни процеси с просто изключване има вида

$$g_{ik}D_iD_k - g_{ki}D_kD_i = x_kD_i - x_iD_k, \quad (57)$$

[(5), с.77, гл.3]

където  $g_{ik}$  и  $g_{ki}$  са неотрицателни скорости на вероятността,  $i, k = 0, 1, \dots, n - 1$ ,  $x_i$  са параметри. Няма сумиране по повтарящи се индекси в горното уравнение. Елементите  $D_k$  ( $n$  на брой) генерират асоциативна алгебра с единица и с базис на Поанкаре-Биркхоф-Вит, зададен с наредените мономи

$$D_{s_1}^{n_1} D_{s_2}^{n_2} \dots D_{s_l}^{n_l}, \quad (58)$$

[(6), с.77, гл.3]

където  $s_1 < s_2 < \dots, s_l$ ,  $l \geq 1$  и  $n_1, n_2, \dots, n_l$  са цели, неотрицателни числа.

Алгата на матричните произведения (АМП): За система с периодични гранични условия стационарното (ненормирано) тегло на конфигурация се дава с израз

$$P(s_1, \dots, s_L) = \text{Tr}(D_{s_1} D_{s_2} \dots D_{s_L}). \quad (59)$$

[(7), с.77, гл.3]

В случай на гранични процеси стационарното (ненормирано) тегло на конфигурация е матричен елемент в допълнително векторно пространство

$$P(s_1, \dots, s_L) = \langle w | D_{s_1} D_{s_2} \dots D_{s_L} | v \rangle \quad (60)$$

[(8), с.77, гл.3]

по отношение на вектори  $|v\rangle$  и  $\langle w|$ , дефинирани от граничните условия

$$\langle w | (L_i^k D_k + x_i) = 0, \quad (R_i^k D_k - x_i) | v \rangle = 0, \quad (61)$$

[(9), с.77, гл.3]

където сумата на  $x_i$  е нула заради вида на матриците от граничните скорости

$$L_i^i = - \sum_{j=0}^{L-1} L_j^i, \quad R_i^i = - \sum_{j=0}^{L-1} R_j^i, \quad \sum_{i=0}^{n-1} x_i = 0. \quad (62)$$

[(10), с.5, гл.3]

Векторите  $\langle w|$  и  $|v\rangle$  принадлежат на (допълнителното) Хилбертово пространство на представянето на операторите  $D_k$  и удовлетворяват условието  $\langle w|v\rangle \neq 0$ , за да съществуват ненулеви тегла. Всъщност АМП означава, че на число на запълване  $s_i$ , в позиция  $i$ , се съпоставя матрица  $D_{s_i} = D_k$  ( $i = 1, 2, \dots, L$ ;  $k = 0, 1, \dots, n-1$ ), ако възелът е зает от частица от вид  $k$ .

В следващия параграф квадратната алгебра се интерпретира от гледна точка на симетриите на системата с просто изключване. В тази връзка най-важно е да се отбележи ролята на параметрите  $x_i$ . Когато те са нули, квадратната алгебра дефинира некомутативна  $n$ -мерна равнина, комодул на квантовата група  $SU_q(n)$  (или  $SU(n)$  в симетрични случаи). Тяхното присъствие се дължи на граничните процеси и означава нарушение на симетрията в обема.

В параграф 4 предлагаме точно (стадионарно) решение за процес, само с влизанци частици в левия край и само с излизанци частици в десния край на верижката ( $\delta = \gamma = 0$ ), посредством деформирани кохерентни състояния, когато  $|v\rangle$  е собствен вектор на оператора на умножение  $a$  за реален параметър  $v$ ,  $|v\rangle = c_q^{-\frac{1}{2}v\alpha} c_q^{\alpha a^+} |0\rangle$  и  $\langle w|$  е собствен вектор на оператора на раждане  $a^+$  за реален параметър  $w$ ,  $\langle w| = \langle 0| c_q^{\alpha a} c_q^{-\frac{1}{2}w\alpha}$ . Предимството на използването на деформирани кохерентни състояния [81] се обуславя от наличието на точна граница  $q = 0$  на решението, което позволява единно описание на частично асиметричния  $q \neq 0$  и на напълно асиметричния процес  $q = 0$ . Атернативно точно решение бе получено чрез  $q$ -полиноми на Ермит [82] и чрез полиноми на Ал-Салам-Чихара [83]. За случай на общ вид гранични условия точното стадионарно решение бе изразено чрез полиномите на Аски-Уилсон [84].

С параграф 5 започва извеждането на точните резултати за процес с два вида частици в рамките на тридиагоналния подход. За предност означаваме с  $\alpha dt$  и  $\gamma dt$  вероятността частица да бъде съответно добавена и извадена в левия край на верижката, с  $\beta dt$  и  $\delta dt$  вероятността частица да бъде съответно извадена и добавена в десния край на верижката. Съвкупността  $s_1, s_2, \dots, s_L$  описва конфигурация върху решетката като  $s_i = 0$ , ако възелът  $i = 1, 2, \dots, L$  е празен и  $s_i = 1$ , ако възелът  $i$  е зает от частица. Частиците скачат с вероятност  $g_{01}dt$  наляво и с вероятност  $g_{10}dt$  надясно. Без ограничение на общостта приемаме  $g_{10} = 1$  и  $g_{01} = q$ , така че моделът зависи от пет параметъра - скоростите на вероятност в обема  $q$  и граничните четири -  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ . Симетричният процес съответства на  $q = 1$ , напълно асиметричният процес съответства на  $q = 0$ . Квадратната алгебра

$$D_1 D_0 - q D_0 D_1 = x_0 D_1 - D_0 x_1, \quad x_0 + x_1 = 0, \quad (63)$$

[(31), с.83, гл.3]

беше решена [82] чрез деформирани осцилатори  $aa^+ - qa^+a = 1$

$$\begin{aligned} D_0 &= \frac{x_0}{1-q} + \frac{x_0 a^+}{\sqrt{1-q}}, \\ D_1 &= \frac{-x_1}{1-q} + \frac{-x_1 a}{\sqrt{1-q}}. \end{aligned} \quad (64)$$

[(32), с.83, гл.3]

Граничните условия имат вида

$$\begin{aligned}(\beta D_1 - \delta D_0)|v\rangle &= x_0|v\rangle, \\ \langle w|(\alpha D_0 - \gamma D_1) &= \langle w|(-x_1).\end{aligned}\quad (65)$$

[(33), с.83, гл.3]

За дадена конфигурация  $(s_1, s_2, \dots, s_L)$  стационарната вероятност се дава с

$$P(s) = \frac{\langle w|D_{s_1}D_{s_2}\dots D_{s_L}|v\rangle}{Z_L}, \quad (66)$$

[(34), с.84, гл.3]

където  $D_{s_i} = D_1$ , ако възелът  $i = 1, 2, \dots, L$  е зает,  $D_{s_i} = D_0$ , ако възелът  $i$  е празен и

$$Z_L = \langle w|(D_0 + D_1)^L|v\rangle \quad (67)$$

[(35), с.84, гл.3]

е нормиращият множител на стационарното разпределение на вероятността.

Предимството на матричния анзац е, че пом са известни представянето на квадратната алгебра и граничните вектори, могат да се пресметнат точно всички физически величини, характеризирани процеса, като средната плътност на частици за възел  $i$

$$\langle s_i \rangle = \frac{\langle w|(D_0 + D_1)^{i-1}D_1(D_0 + D_1)^{L-i}|v\rangle}{Z_L}, \quad (68)$$

[(36), с.84, гл.3]

дву-точковата корелационна функция

$$\langle s_i s_j \rangle = \frac{\langle w|(D_0 + D_1)^{i-1}D_1(D_0 + D_1)^{j-i-1}D_1(D_0 + D_1)^{L-j}|v\rangle}{Z_L}, \quad (69)$$

[(37), с.84, гл.3]

и по-високите корелационни функции. Тукът  $J$  през връзката между възел  $i$  и  $i+1$ ,

$$\begin{aligned}J &= \langle s_i(1 - s_{i+1}) - q(1 - s_i)s_{i+1} \rangle \\ &= \frac{\langle w|(D_0 + D_1)^{i-1}(D_1D_0 - qD_0D_1)(D_0 + D_1)^{L-i-1}|v\rangle}{Z_L}\end{aligned}\quad (70)$$

[(38), с.84, гл.3]

се дава просто с израза  $J = \frac{Z_{L-1}}{Z_L}$ .

В този параграф извеждаме първия основен резултат за тридиагоналното обобщение на матричния подход:

$$\begin{aligned}\text{Операторите } D_0, D_1 \text{ на асиметричния процес са генератори на алгебра на Аски-Уилсон} \\ D_0D_1^2 - (q + q^{-1})D_1D_0D_1 + D_1^2D_0 &+ x_1q^{-1/2}(q^{1/2} - q^{-1/2})\{D_0, D_1\} \\ &= x_1^2q^{-1}D_0 - x_0x_1q^{-1}D_1 + x_0q^{-1/2}(q^{1/2} - q^{-1/2})D_1^2, \\ D_0^2D_1 - (q + q^{-1})D_0D_1D_0 + D_1D_0^2 &- x_0q^{-1/2}(q^{1/2} - q^{-1/2})\{D_0, D_1\} \\ &= x_0^2q^{-1}D_1 - x_0x_1q^{-1}D_0 + x_1q^{-1/2}(q^{1/2} - q^{-1/2})D_0^2,\end{aligned}\quad (71)$$

[(42), с.85, гл.3]

със структурни константи

$$\rho = x_1^2 q^{-1}, \quad \rho^* = x_0^2 q^{-1}, \quad \omega = -x_0 x_1 q^{-1}, \quad (72)$$

$$\gamma = -x_1 q^{-1/2}(q^{1/2} - q^{-1/2}), \quad \gamma^* = x_0 q^{-1/2}(q^{1/2} - q^{-1/2}) \quad (73)$$

[(48-49), с.86, гл.3]

and  $\eta = \eta^* = 0$ . Използването на афинните трансформации позволява редуцирана форма на алгебрата чрез анулиране на  $\gamma = \gamma^* = 0$ , но едновременно с това и на  $\rho = \rho^* = 0$ . За операторите  $D_0, D_1$  намираме съотношенията

$$\begin{aligned} [D_1, D_0 D_1^2 - (q + q^{-1}) D_1 D_0 D_1 + D_1^2 D_0] &= 0, \\ [D_0, D_1 D_0^2 - (q + q^{-1}) D_0 D_1 D_0 + D_0^2 D_1] &= 0, \end{aligned} \quad (74)$$

[(51), с.86, гл.3]

което показва, че тридиагоналната алгебра на асиметричния процес в обема е изоморфна на  $q$ -съотношения на Сер за ниво нула на квантовата афинна  $U_q(\widehat{su(2)})$ .

Оттук в границата  $q \rightarrow 1$  веднага се получава и тридиагоналната алгебра на симетричния процес, (изоморфна на съотношения на Сер за ниво нула ( $\widehat{su(2)}$ ))

$$\begin{aligned} [D_1, D_0 D_1^2 - 2D_1 D_0 D_1 + D_1^2 D_0] &= 0, \\ [D_0, D_1 D_0^2 - 2D_0 D_1 D_0 + D_0^2 D_1] &= 0, \end{aligned} \quad (75)$$

[(56), с.87, гл.3]

определена като специален случай при  $k = k^* = 0$  на съотношенията на Долян-Гради.

В параграф 6 получаваме важния резултат за граничната алгебра на частично асиметричния процес за най-общи гранични условия, когато от четири оператора  $\beta D_1, -\delta D_0, -\gamma D_1, \alpha D_0$ , удовлетворяващи две линейно независими съотношения случай А - от един и същи тип

$$\beta D_1 \alpha D_0 - q \alpha D_0 \beta D_1 = x_1 \beta \alpha D_0 - \alpha \beta D_1 x_0 \quad (76)$$

и

$$\gamma D_1 \delta D_0 - q \delta D_0 \gamma D_1 = x_1 \gamma \delta D_0 - \delta \gamma D_1 x_0 \quad (77)$$

[(62), (63), с.88, гл.3]

случай В - второто съотношение има еквивалентен вид

$$\delta D_0 \gamma D_1 - q^{-1} \gamma D_1 \delta D_0 = q^{-1} x_0 \delta \gamma D_1 - q^{-1} \gamma \delta D_0 x_1 \quad (78)$$

[(64), с.88, гл.3]

строим двата гранични оператора, задаващи граничните условия.

Ние разглеждаме по-отделно случаите А и В и описваме съответните представления на алгебрите на Аски-Уилсон, и тридиагоналната алгебра на гранична симетрия, за да докажем, че тридиагоналният алгебричен подход възпроизвежда всички използвани приложения на матричния анзац, включително и крайномерните представления, и специалните

случай. Непо повече, случай В съдържа и нови представяния, чието приложение би могло да разшири кръга на изучавани модели.

Съществено за случай А е квантовата  $U_q(\mathfrak{su}(2))$  инвариантност в обема, която позволява граничните оператори да бъдат изразени чрез генераторите  $N, A_{\pm}$  на квантовата симетрия във вида

$$\begin{aligned} \beta D_1 - \delta D_0 &= \\ -\frac{x_1\beta}{\sqrt{1-q}}q^{N/2}A_+ - \frac{x_0\delta}{\sqrt{1-q}}A_-q^{N/2} - \frac{x_1\beta q^{1/2} + x_0\delta}{1-q}q^N - \frac{x_1\beta + x_0\delta}{1-q}, \\ \alpha D_0 - \gamma D_1 &= \\ \frac{x_0\alpha}{\sqrt{1-q}}q^{-N/2}A_+ + \frac{x_1\gamma}{\sqrt{1-q}}A_-q^{-N/2} + \frac{x_0\alpha q^{-1/2} + x_1\gamma}{1-q}q^{-N} + \frac{x_0\alpha + x_1\gamma}{1-q}. \end{aligned} \quad (79)$$

[(71), с.89, гл.3]

Ние доказваме, че след като отделим трансляционни части от граничните оператори

$$\begin{aligned} \beta D_1 - \delta D_0 &= A - \frac{x_1\beta + x_0\delta}{1-q}, \\ \alpha D_0 - \gamma D_1 &= A^* + \frac{x_0\alpha + x_1\gamma}{1-q}, \end{aligned} \quad (80)$$

[(72), с.89, гл.3]

операторите  $A$  и  $A^*$  ( $[A, A^*]_q = q^{1/2}AA^* - q^{-1/2}A^*A$  означава  $q$ -комутатор) удовлетворяват съотношенията на алгебрата на Аски-Уилсон

$$\begin{aligned} [[A, A^*]_q, A]_q &= -\rho A^* - \omega A - \eta, \\ [A^*, [A, A^*]_q]_q &= -\rho^* A - \omega A^* - \eta^*, \end{aligned} \quad (81)$$

[(75), с.90, гл.3]

с операторно-значни структурни константи

$$-\rho = x_0x_1\beta\delta q^{-1/2}(q^{1/2} + q^{-1/2})^2, \quad -\rho^* = x_0x_1\alpha\gamma q^{-3/2}(q^{1/2} + q^{-1/2})^2, \quad (82)$$

$$\begin{aligned} -\omega &= (x_1\beta q^{1/2} + x_0\delta)(x_1\gamma + x_0\alpha) - (x_1^2\beta\gamma + x_0^2\alpha\delta)(q^{1/2} - q^{-1/2})Q, \\ \eta &= q^{1/2}(q^{1/2} + q^{-1/2}) \left( x_0x_1\beta\delta(x_1\gamma + x_0\alpha)Q - \frac{(x_1\beta q^{1/2} + x_0\delta)(x_1^2\beta\gamma + x_0^2\alpha\delta)}{q^{1/2} - q^{-1/2}} \right), \\ \eta^* &= q^{1/2}(q^{1/2} + q^{-1/2}) \left( x_0x_1\alpha\gamma(x_1\beta q^{1/2} + x_0\delta)Q + \frac{(x_0\alpha + x_1\gamma)(x_0^2\alpha\delta + x_1^2\beta\gamma)}{q^{1/2} - q^{-1/2}} \right). \end{aligned} \quad (83)$$

[(76-77), с.90, гл.3]

От друга страна, важноста на съотношенията (74) (съответно (75)) се състои в това, че те показват възникването на афинната квантова симетрия  $U_q(\widehat{\mathfrak{su}(2)})$  (съответно границата  $q \rightarrow 1$ ) като *скрита симетрия* в обема на асиметричния (съответно симетричния) процес с просто изключване. Наличието на скрита афинна симетрия в обема веднага

позволява задаването на граничните оператори като ковариантни обекти по отношение на тази симетрия и граничната алгебра се появява естествено като подалгебра идеал. По този начин тридиагоналият подход представлява алгебричен подход за независимо изследване на стохастичната динамика.

Параграф 7 съдържа изключително важен резултат, който придава дълбок смисъл на граничната симетрия на Аски-Уилсон, тъй като чрез нейните генератори ние конструираме операторно-значна  $K$ -матрица, която удовлетворява граничното уравнение на Янг-Бакстер. С квантовата афинна алгебра  $U_q(\widehat{sl}(2))$  се свързва  $R$ -матрица  $R(z_1/z_2) \in \text{End}_{\mathbb{C}} V_{z_1} \otimes V_{z_2}$ , където  $V_z$  е двумерният  $U_q(\widehat{sl}(2))$  ("evaluation") модул, удовлетворяващ уравнението на Янг-Бакстер

$$R_{12}(z_1/z_2)R_{13}(z_1)R_{23}(z_2) = R_{23}(z_2)R_{13}(z_1)R_{12}(z_1/z_2). \quad (84)$$

[(80), с.92, гл.3]

Предполагаме модел с безкраен обем, чиито Хамилтониан е инвариантен по отношение на квантовата афинна симетрия. При наличие на граница има още една матрица  $K(z)$ , удовлетворяваща граничното уравнение на Янг-Бакстер, т.е. уравнение на отражение

$$R(z_1/z_2)(K(z_1) \otimes I)R(z_1/z_2)(I \otimes K(z_2)) - (I \otimes K(z_2))R(z_1/z_2)(K(z_1) \otimes I)R(z_1/z_2) = 0. \quad (85)$$

[(85), с.92, гл.3]

Ние доказваме, че може да се построи решение на (85) в термините на генераторите  $A, A^*$  на алгебрата на Аски-Уилсон, удовлетворяващи (81), като всички структурни константи  $\rho, \rho^*, \omega, \eta, \eta^*$  са различни от нула. Решението  $K(z) = K^{op}(z) + K^e(z)$  гласи експлицитно

$$K^{op}(z) = \begin{pmatrix} q^{1/2}zA - q^{-1/2}z^{-1}\frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho^*}}A^* & -\frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho^*}}(q^{1/2} - q^{-1/2})[A^*, A]_q \\ -\rho^{-1}\frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho^*}}(q^{1/2} - q^{-1/2})[A, A^*]_q & -q^{-1/2}z^{-1}A + q^{1/2}z\frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho^*}}A^* \end{pmatrix} \quad (86)$$

[(89), с.93, гл.3]

и  $K^e(z)$  е

$$\begin{aligned} K_{11}^e &= \frac{q^{1/2}z\eta^* - q^{-1/2}z^{-1}\eta}{\rho(q^{1/2} + q^{-1/2})}, & K_{22}^e &= \frac{q^{-1/2}z\eta - q^{1/2}z^{-1}\eta^*}{\rho(q^{1/2} + q^{-1/2})}, \\ K_{12}^e &= -\rho \frac{q^{1/2}z^2 + q^{-1/2}z^{-2}}{q^{1/2} + q^{-1/2}} - \frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho^*}}\omega, & K_{21}^e &= -\frac{q^{1/2}z^2 + q^{-1/2}z^{-2}}{q^{1/2} + q^{-1/2}} - \rho^{-1}\frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho^*}}\omega. \end{aligned} \quad (87)$$

[(90), с.93, гл.3]

Ако означим това решение с  $K(z, \rho)$ , то съществува още едно решение (на дуалното уравнение)  $K^*(z) = K^t(z^{-1}, \rho^*)$ .

Съществуването на операторно-значно решение на граничното уравнение на Янг-Бакстер осмисля по нов начин алгебрата на Аски-Уилсон, като я превръща в симетрия, предоставяща възможност за точно решаване на модела и извършване на стационарното състояние.

В следващия параграф се обсъждат граничните оператори на отворения асиметричен процес от гледна точка на еквивалентността на модела с интегрируемата квантова синцова

$1/2 \text{ XXZ}$  верижка. Хамилтонианът  $H_{XXZ}$  е  $U_q(su(2))$  инвариантен Хамилтониан  $H_{XXZ}^{QGr}$  с добавен и диагонални гранични членове  $B_1$  и  $B_L$ , където

$$H_{XXZ}^{QGr} = -1/2 \sum_{i=1}^{L-1} (\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + \Delta_q \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z + h(\sigma_{i+1}^z - \sigma_i^z) + \Delta_q), \quad (88)$$

$$\Delta_q = -\frac{1}{2}(q + q^{-1}), \quad h = \frac{1}{2}(q - q^{-1}), \quad (89)$$

[(83-84), с.32, гл.3]

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{2q} (\alpha + \gamma + (\alpha - \gamma)\sigma_1^z - 2\alpha\mu\sigma_1^- - 2\gamma\mu^{-1}\sigma_1^+), \\ B_L &= \frac{(\beta + \delta - (\beta - \delta)\sigma_L^z - 2\delta\mu q^{L-1}\sigma_L^- - 2\beta\mu^{-1}q^{-L+1}\sigma_L^+)}{2q}. \end{aligned} \quad (90)$$

[(93), с.94, гл.3]

Наличието на гранични процеси (т.е. диагонални членове в Хамилтониана) нарушава  $U_q(su(2))$  инвариантността в обема, като граничните процеси дефинират гранични оператори, които носят остатъчната симетрия на процеса. Математическият израз на това е факта, че граничните оператори са линейно ковариантни обекти на  $U_q(su(2))$ . Ние показваме, че  $\alpha D_0 - \gamma D_1$  комутира с  $H(q)^{QGr}$ , а  $\beta D_1 - \delta D_0$  - с  $H(-q^{-1})^{QGr}$ . Оттук следва, че граничните оператори придобиват съществен физически смисъл на два нелокални запазващи се товари за отворения асиметричен процес с изключване.

В параграф 9 се съдържат важните резултати за явния вид на представянето на граничните оператори чрез полиномите на Аски-Уилсон, зависещи от четири параметъра, еднозначно свързани с граничните параметри. Това от своя страна определя точно и за първи път в матричния подход функциите, които дефинират фазовата диаграма на модела.

В пространството на симетрични полиноми на Лоран  $f[y]$  с базис  $(p_0, p_1, \dots)$ , където  $p_n = p_n(x; a, b, c, d)$  означава  $n$ -тият полином на Аски-Уилсон [85], зависещ от четири параметъра  $a, b, c, d$

$$p_n =_A \Phi_3 \left( \begin{matrix} q^{-n}, abcdq^{n-1}, ay, ay^{-1} \\ ab, ac, ad \end{matrix} \middle| q; q \right) \quad (91)$$

[(108), с.97, гл.3]

като  $p_0 = 1$ ,  $x = y + y^{-1}$  и  $0 < q < 1$ . Нека  $\mathcal{A}$  означава матрицата определена от рекурентното съотношение за полиномите на Аски-Уилсон

$$xp_n = b_n p_{n+1} + a_n p_n + c_n p_{n-1}, \quad p_{-1} = 0, \quad (92)$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_0 & c_1 & & \\ b_0 & a_1 & c_2 & \\ & b_1 & a_2 & \ddots \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \quad (93)$$



[(109-110), с.97, гл.3]

Явният вид на матричните елементи на  $\mathcal{A}$  е

$$a_n = a + a^{-1} - b_n - c_n, \quad (94)$$

$$b_n = \frac{(1 - abq^n)(1 - acq^n)(1 - adq^n)(1 - abcdq^{n-1})}{a(1 - abcdq^{2n-1})(1 - abcdq^{2n})}, \quad (95)$$

$$c_n = \frac{a(1 - q^n)(1 - bcq^{n-1})(1 - bdq^{n-1})(1 - cdq^{n-1})}{(1 - abcdq^{2n-2})(1 - abcdq^{2n-1})}. \quad (96)$$

[(111-113), с.97, гл.3]

Резюмираме резултатите (за случая А): Съществува представяне  $\pi$  в пространството с базис

$$(p_0, p_1, p_2, \dots)^t, \quad (97)$$

[(116), с.97, гл.3]

срочно който десният граничен оператор  $D_1 - \frac{\delta}{\beta} D_0 \equiv D_1 + bdD_0$  е диагонална матрица  $\text{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots)$  със собствени стойности  $\lambda_n$

$$\lambda_n = \frac{q^{1/2}}{1 - q} (bq^{-n} + dq^n + 1 + bd). \quad (98)$$

[(117), с.97, гл.3]

Левият граничен оператор  $D_0 - \frac{\gamma}{\alpha} D_1 \equiv D_0 + acD_1$  се представя с тридиагонална матрица

$$\pi(D_0 + acD_1) = \frac{q^{1/2}}{1 - q} (b\mathcal{A}^t + 1 + ac). \quad (99)$$

[(118), с.98, гл.3]

Дуалното представяне  $\pi^*$  е с базис

$$(p_0, p_1, p_2, \dots), \quad (100)$$

[(119), с.98, гл.3]

срочно който левият граничен оператор  $\pi^*(D_0 + acD_1)$  е диагонална  $(\lambda_0^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots)$  с диагонални елементи

$$\lambda_n^* = \frac{q^{1/2}}{1 - q} (aq^{-n} + cq^n + 1 + ac). \quad (101)$$

[(120), с.98, гл.3]

Десният граничен оператор е тридиагонална матрица

$$\pi^*(D_1 + bdD_0) = \frac{q^{1/2}}{1 - q} (a\mathcal{A} + 1 + bd). \quad (102)$$

[(121), с.25, гл.3]

Тези формули дефинират съгласното представяне (съответно дуалното представяне) на граничната алгебра на Аски-Уилсон, като дотук връзката с граничните параметри е само

$$\pm \frac{\gamma}{\alpha} = ac, \quad \pm \frac{\delta}{\beta} = bd. \quad (103)$$

[(106), с.96, гл.3]

Изборът на граничните вектори

$$\langle w| = h_0^{-1/2}(p_0, 0, 0, \dots), \quad |v\rangle = h_0^{-1/2}(p_0, 0, 0, \dots)^t, \quad (104)$$

[(122), с.98, гл.3]

(където  $h_i$  е нормировката от условието за ортогоналност) да са собствени вектори на съответните диагонални оператори  $\pi(D_1 + bdD_0)$  и  $\pi^*(D_0 + acD_1)$ , удовлетворяващи граничните уравнения

$$\begin{aligned} (D_1 - \frac{\delta}{\beta}D_0)|v\rangle - s|v\rangle &= 0, \\ \langle w|(D_0 - \frac{\gamma}{\alpha}D_1) - \langle w|s &= 0, \end{aligned} \quad (105)$$

[(123), с.98, гл.3]

превърта тази връзка в еднозначно съответствие (за даденото представяне)

$$a = \kappa_+^*, \quad b = \kappa_+, \quad c = \kappa_-^*, \quad d = \kappa_-, \quad (106)$$

[(124), с.98, гл.3]

където

$$\begin{aligned} \kappa_{\pm} &= \frac{-(\beta - \delta - (1 - q)) \pm \sqrt{(\beta - \delta - (1 - q))^2 + 4\beta\delta}}{2\beta}, \\ \kappa_{\pm}^* &= \frac{-(\alpha - \gamma - (1 - q)) \pm \sqrt{(\alpha - \gamma - (1 - q))^2 + 4\alpha\gamma}}{2\alpha}. \end{aligned} \quad (107)$$

[(125), с.98, гл.3]

Подчертаваме, че това са функциите на параметрите, които дефинират фазовото пространство на модела, които винаги са вземани на готово, а тук следват от граничната симетрия. За паралелно разглеждания случай B получаваме различно представяне и тези функции също се различават, което показва, че граничната симетрия разширява възможностите за приложение, и това заслужава да се разгледа.

В параграф 10 доказваме важния резултат, че всеки от граничните оператори и трансфер матрицата образуват алгебри на Аски-Уилсън, които са изоморфни една на друга и на алгебрата на граничните оператори.

Операторът  $C = D_0 + D_1$ , чрез който се определя нормировъният множител  $Z_L$ , вижда във всичките изрази за физическите величини и играе роля на трансфер матрица. Ще приведем само явния вид на тридиагоналното представяне на оператора  $D_0 + D_1$  по отношение на базиса  $(p_0, p_1, p_2, \dots)^t$

$$(D_0 + D_1)p_n = \frac{1}{1 - q}(2 + x)p_n, \quad xp_n = Ap_n, \quad \pi(A) = \mathcal{A}^t \quad (108)$$

[(136), с.100, гл.3]

и съответно дуалното тридиагонално представяне по отношение на базиса  $(p_0, p_1, p_2, \dots)$

$$(D_0 + D_1)p_n = \frac{1}{1-q}(2+x)p_n, \quad xp_n = A^*p_n, \quad \pi^*(A^*) = A. \quad (109)$$

[(141), с.101, гл.3]

Тридиагоналното представяне бе използвано в [84], под формата на уравнение за собствени стойности за трансфер матрицата  $D_0 + D_1$ , за получаване на точното решение в стационарното състояние чрез полиномите на Аски-Уилсон и без никаква връзка с алгебрата. Смятаме, че именно наличието на тридиагоналната гранична симетрия, в качеството на скрита симетрия на процеса, позволява намирането на точното решение, за общия случай на гранични условия, чрез полиномите на Аски-Уилсон.

В параграф 11 получаваме условията за крайно-мерно представяне на граничната алгебра на Аски-Уилсон за отворения асиметричен процес. Те следват от прекъсване на стълбичното представяне чрез запузяване на знаменателя на матричните елементи  $b_n$  на тридиагоналната матрица  $A$ . Условията, които получаваме, възпроизвеждат използваните в предишни приложения на матричния анзац крайномерни представяния.

Същото се отнася и за специалните случаи, разглеждани в параграф 12, които са случаи на тридиагонални алгебри, изоморфни на  $q$ -сътношения на Сер. Те съответстват на процеси само с влизанци частици отляво и само излизанци отдясно, като представянията използвани за тяхното точно решаване в досегашни приложения на матричния подход се възпроизвеждат.

Изводите в тези два параграфа подчертават полезността на тридиагоналния подход, който възпроизвежда известните положения на анзаца на матрични произведения и освен това го обобщава за приложения извън стационарното състояние.

В параграф 13 привеждаме за пълнота сведения за точното решение на отворения асиметричен процес в стационарното състояние получено чрез полиномите на Аски-Уилсон и както вече отбелязахме благодарение на скритата гранична симетрия на процеса, основаваща се на алгебрата на Аски-Уилсон.

В параграф 14 даваме интерпретация на условието за частичен баланс [(165), с.106, гл.3] от гледна точка на представянията на граничната симетрия.

Параграф 15 е посветен на симетричния процес, за който извеждаме граничната алгебра за случая на общи гранични условия. Резултатът е важен сам по себе си за точното решаване на процеса в стационарно състояние, но освен това подчертава значимостта на тридиагоналния подход за единно описание на трите случая на процеса с просто изключване. Вече изтъкахме, че алгебрата (на Аски-Уилсон и тридиагоналната) на симетричния процес в обема се получава веднага като границата  $q = 1$  на съответната алгебра на асиметричния процес. Тук ние извеждаме граничната алгебра на симетричния процес и показваме, че тя е границата при  $q = 1$  на деформираната тридиагонална алгебра на асиметричния процес. Неприродните модули на алгебрата на симетричния процес са полиномите на Уилсон, които са границата  $q = 1$  на полиномите на Аски-Уилсон.

В параграф 16 построяваме (безкрайна) съвкупност от нелокални запазващи се товари за отворения симетричен процес. Тези величини се дават тук за първи път и представляват съществения резултат за точното решаване на процеса извън стационарното състояние. Най-ниските запазващи се величини са двата гранични оператора

$$B^R = \beta D_1 - \delta D_0, \quad B^L = \alpha D_1 - \gamma D_0, \quad (110)$$

[(203), с.112, гл.3]

които удовлетворяват

$$\begin{aligned} [B^R, [B^R, [B^R, B^L]]] &= -x_0 x_1 \beta \delta [B^R, B^L], \\ [B^L, [B^L, [B^L, B^R]]] &= -x_0 x_1 \alpha \gamma [B^L, B^R]. \end{aligned} \quad (111)$$

[(204), с.112, гл.3]

С идентификацията  $R_0 \equiv B^R$  и  $\tilde{R} \equiv B^L$  записваме тези товари като  $R_{2n} = -\frac{2}{\rho} [B^R [B^L, R_{2n-2}]] - \tilde{R}_{2n-2}$  в съответствие с формулата [(194), с.111, гл.3].

В параграф 17 получаваме алгебрата на Аски-Уилсон за напълно асиметричния процес. Този резултат е убедителен за единното описание на трите разновидности на процеса в рамките на тридиагонален подход. Съществено е, че границата  $q = 0$  не следва непосредствено както случая  $q = 1$ , а изисква не-нетривиални алгебрични стъпки. Първо е важно, че при този процес винаги има само влизачи частици от единия край и само излизачи от другия, т.е. граничните параметри са само два. Изхождайки от онта с асиметричен процес с два гранични параметъра, когато тридиагоналната алгебра е изоморфна на квантови  $q$ -съотношения на Сер, ние свързваме алгебрата на напълно асиметричния процес с границата  $q = 0$  на присъединеното представяне на  $U_q(su(2))$ . Получаваме тридиагоналната алгебра на напълно асиметричния процес в обема във вида

$$D_1 D_0 D_1 D_0 - D_0 D_1 D_0 D_1 = D_1 D_0 - D_0 D_1 \quad (112)$$

[(231), с.116, гл.3]

и съответно, за граничната алгебра с генератори (десния)  $B^R$  и (левия)  $B^L$  гранични оператори, намираме съотношенията

$$B^R = \beta D_1, \quad B^L = \alpha D_0, \quad (113)$$

[(232), с.116, гл.3]

$$B^R B^L B^R B^L - B^L B^R B^L B^R = \alpha \beta (B^R B^L - B^L B^R). \quad (114)$$

[(233), с.116, гл.3]

И в двата случая алгебричните съотношения могат да се интерпретират като гранични уравнения на Янг-Бакстер (т.е. модифицирани уравнения на отражение) за матрица на отражение и съответно  $R$ -матрица на квантова  $su(2)$ , но с параметър на деформация различен от  $q$ . Това е и съществената причина за точно решаване както в стационарното състояние, така и извън него.

Параграф 18 е посветен на анализ на спектрална задача свързана с алгебрата на Аски-Уилсон и нейното точно решение. Този резултат е изключително важен за намиране на спектъра на матрицата на прехода, съответно Хамилтониан, на физическа система с гранична симетрия, основана на алгебрата на Аски-Уилсон.

Ние дефинираме алгебрата на Аски-Уилсон, конкретно за процеса, чрез хомоморфизъм в  $U_q(\widehat{su}(2))$ . Вече казахме, че в основното представяне единият от операторите е разностният оператор от втори ред за полиномите на Аски-Уилсон, чийто явен вид като билансйна форма от генераторите на симетрията в обема води до естествената идентификация с Хамилтониан на подходяща физическа система. По този начин проблемът за диагонализация на матрицата на преход (Хамилтониан) е еквивалентен на получаване на спектъра на разностния оператор от втори ред, който е известен като точно решаем оператор. Ние получихме, че правичните оператори са транслираните генератори на алгебрата на Аски-Уилсон  $A, A^*$ . Основното представяне се реализира в пространство на симетрични полиноми на Лоран, с базис полиномите на Аски-Уилсон

$$Ap_n[y] = (y + y^{-1})p_n[y], \quad A^*p_n[y] = \mathcal{D}p_n[y], \quad (115)$$

[(237), с.118, гл.3]  
където

$$\begin{aligned} \mathcal{D}p_n[y] = (1 + abcdq^{-1})p_n[y] &+ \frac{(1 - ay)(1 - by)(1 - cy)(1 - dy)}{(1 - y^2)(1 - qy^2)}(p_n[ay] - p_n[y]) \\ &+ \frac{(a - y)(b - y)(c - y)(d - y)}{(1 - y^2)(q - y^2)}(p_n[q^{-1}y] - p_n[y]), \end{aligned} \quad (116)$$

[(238), с.118, гл.3]

със свойството  $\mathcal{D}(1) = 1 + abcdq^{-1}$ . Уравнението за собствени стойности с общи собствени вектори  $p_n$  е

$$\mathcal{D}p_n = \lambda_n^* p_n, \quad \lambda_n^* = q^{-n} + abcdq^{n-1} \quad (117)$$

[(239), с.118, гл.3]

и  $A^*$  се представя с безкрайно-мерна матрица  $\text{diag}(\lambda_0^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots)$ . За получаване на точния спектър прилагаме процедурата на алгебричен Бете Анзатц. Най-напред разлагаме  $p_n$  като произведение по нулите

$$p_n(y) = \prod_{m=1}^n (y - y_m)(y - y_m^{-1}) \quad (118)$$

[(242), с.118, гл.3]

и се възползваме от известното уравнение на Бете за тези нули [58]

$$\prod_{\nu=1}^4 \frac{y_k - w_\nu}{w_\nu y_k - 1} = \prod_{l=1, l \neq k}^L \frac{(qy_k - y_l)(qy_k y_l - 1)}{(y_k - qy_l)(y_k y_l - q)}. \quad (119)$$

[(243), с.119, гл.3]

като  $w_1 = a, w_2 = b, w_3 = c, w_4 = d$ . Тези уравнения са валидни за всяко фиксирано  $n$ ,

например за всяко  $n = L < 2j + 1$ , така че за всяко  $L$  съществува само един полином (119), което означава, че за всяко  $L (< 2j + 1)$  уравненията на Бете имат точно едно решение за съвкупността от нулите  $y_k, k = 1, \dots, L$  на полинома от степен  $L$ .

Процедурата за получаване на точно решение може да се резюмира със следните няколко нетривиални стъпки:

1. Използваме единственото решение на уравненията на Бете за нулите  $y_0, y_1, \dots, y_{L-1}$ , за да получим дискретна съвкупност от полиноми на Аски-Уилсон.
2. Налагаме условие за крайномерно представяне, като използваме абелевата симетрия на процеса, за да може в пространството с дискретния базис от полиноми да се реализира крайномерно представяне на тридиагоналната алгебра.
3. Свързваме това крайномерно представяне на тридиагоналната алгебра с неприводимото крайномерно представяне на афинната квантова симетрия с размерност  $2^L$ .

Условието за крайномерно представяне трябва да се наложи по такъв начин, че да не води до връзки между параметрите на модела, тъй като това ограничава неравновесното поведение на системата. В предния параграф беше показано, че прекъсването на стълбичното представяне чрез запълняване на  $b_n$  води до връзката

$$\alpha\beta = q^{L-1}\gamma\delta, \quad (120)$$

[(168), с.107, гл.3]

което е условието за частичен баланс. Използвайки параметъра  $\zeta$  на абелевата симетрия в обема, ние предефинираме  $a, b, c, d$ , което не влияе на уравненията за нулите. В множител  $(1 - \zeta^2 abq^n)$  разглеждаме параметъра  $\zeta^2 ab$  като нов параметър  $t$  и независим от  $a, b$ . Условието за крайномерно представяне е

$$tq^n = 1. \quad (121)$$

[(249), с.120, гл.3]

Получаваме дискретна съвкупност от полиноми на Аски-Уилсон

$$p_n(x_k, a, b, c, d|t, q), \quad n = 0, 1, \dots, L-1, \quad (122)$$

[(250), с.120, гл.3]

с условие за ортогоналност

$$\sum_{k=0}^{L-1} w_k p_n(x_k) p_m(x_k) = 0, \quad (123)$$

[(251), с.120, гл.3]

$n \neq m$ . В пространството с този базис имаме

$$p_L(x) = const \prod_{k=0}^{L-1} (x - x_k). \quad (124)$$

[(258), с.121, гл.3]

Този полином с точност до константа съвпада със съответния полином, асоцииран с крайномерното неприводимо представяне на афинната квантова симетрия, което обосновава стъпка 3.

По-нататък доказваме, че за всяко  $x = x_k$ , в пространството с ортогонален базис  $|\nu_n\rangle = |p_n\rangle$ ,  $\langle \nu_m | \nu_n \rangle = \delta_{mn}$ , съществува представяне  $V_n$ . Тридиагоналната матрица  $A$  е неприводимо тридиагонална, а диагоналната  $A^*$  е с прост спектър, т.е. собственото подпространство на всяка собствена стойност  $\lambda_n^*$  е с размерност 1. Тези матрици образуват двойка на Леонард и удовлетворяват алгебричните съотношения

$$\begin{aligned} [A, [A, [A, A^*]_q]_{q^{-1}}] &= \rho[A, A^*], \\ [A^*, [A^*, [A^*, A]_q]_{q^{-1}}] &= \rho^*[A^*, A] \end{aligned} \quad (125)$$

[(255), с.121, гл.3]

като  $\rho, \rho^*$  са дадени с (82).

Ние отъждествяваме  $p_0(x_i), p_1(x_i)$  (където  $x_i = y_i + y_i^{-1}$ ) с базиса на неприводимото двумерно представяне  $V_1(\nu_0(x_i), \nu_1(x_i))$  на квантовата афинна алгебра  $U_q(\widehat{su(2)})$ . След това доказваме, че в пространството на тензорното произведение

$$V_1(x_1) \otimes \dots \otimes V_1(x_L), \quad (126)$$

[(264), с.122, гл.3]

в което се реализира неприводимо представяне на  $U_q(\widehat{su(2)})$  с размерност  $2^L$ , също така представява крайномерно, неприводимо представяне на тридиагоналната алгебра. Операторът  $A$  действа върху  $V_1(x_k)$  чрез умножение на  $x_k$

$$AV_1(x_k) = x_k V_1(x_k). \quad (127)$$

[(268), с.123, гл.3]

Дефинираме копроизведение на оператора  $A$

$$\Delta(A) = A_{i_1} \otimes I + I \otimes A_{k_2} + A_{i_1} \otimes A_{k_2}. \quad (128)$$

[(269), с.123, гл.3]

Итерирането на копроизведението дава оператора (за всяко крайно  $n$ )

$$\Delta^{(n)} A = \Delta_P^{(n)} A + A \otimes \Delta_P^{(n-1)} A + \Delta_P^{(n-1)} A \otimes A + \dots + A^{(k)} \otimes \Delta_P^{(n-k)} A^{(k)} + \Delta_P^{(n-k)} A^{(k)} \otimes A^{(k)} + A^{(n)} \quad (129)$$

[(271), с.124, гл.3]

като  $k = 1, \dots, n-1$  и  $A^{(l)} \equiv A \otimes A \otimes \dots \otimes A$  ( $l$  пъти), за  $l = k$  от  $l = n$ .

Доказваме, че операторите

$$A^{*(L)} = A^* \otimes I^{L-1} \quad (130)$$

[(272), с.124, гл.3]

и  $A^{(L)} = \Delta^{(L)} A$  от (271) за  $n = L$  образуват представяне на алгебрата

$$[A^{*(L)}, [A^{*(L)}, [A^{*(L)}, A^{(L)}]_q]_{q^{-1}}] = \rho^*[A^{*(L)}, A^{(L)}] \quad (131)$$

[(273), с.124, гл.3]

Отъждествяваме тензорното произведение (126) с произволно състояние  $\psi(x_1, x_2, \dots, x_L)$  на многочастичната система върху ренетката и получаваме

$$A\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left( \sum_{i=1}^L x_i + \sum_{i<j} x_i x_j + \dots + x_1 x_2 \dots x_L \right) \psi(x_1, x_2, \dots, x_L), \quad (132)$$

[(282), с.125, гл.3]

което дава  $2^L - 1$  собствени стойности. Линеваният вектор е собствения вектор  $\Omega = p_0(x_1)p_0(x_2)\dots p_0(x_L)$  на оператора  $A^*$ , който се определя от условието  $\Omega = 1$  и  $\mathcal{D}(1) = 1 + abcdq^{-1}$  и удовлетворява

$$A^*\Omega = (1 + abcdq^{-1})\Omega. \quad (133)$$

[(278), с.125, гл.3]

Този вектор съответства на единственото вакуумно състояние на системата. С интерпретацията на  $A + A^*$  като Хамилтониан получаваме пълен набор от  $2^L$  собствени стойности за описание на динамиката.

Резултатът в явен вид за диагонализация на матрицата на прехода за асиметричния процес с изключване, където граничните оператори  $A + \beta - \delta$  и  $A^* + \alpha - \gamma$  задават полиномнално представяне, е следният:

$$E = \beta - \delta + \left( (1 - q) \sum_{i=1}^L \hat{x}_i + (1 - q)^2 \sum_{i<j} \hat{x}_i \hat{x}_j + \dots + (1 - q)^L \hat{x}_1 \hat{x}_2 \dots \hat{x}_L \right), \quad (134)$$

[(287), с.127, гл.3]

където  $\hat{x}_i^{-1} = \hat{y}_i + \hat{y}_i^{-1}$  и  $\hat{y}_i$  удовлетворяват Бете уравнението

$$\frac{(y\hat{y}_i - k_+(\alpha, \gamma))(\hat{y}_i - k_+(\beta, \delta))(\hat{y}_i - k_-(\alpha, \gamma))(\hat{y}_i - k_-(\beta, \delta))}{(k_+(\alpha, \gamma)\hat{y}_k - 1)(k_+(\beta, \delta)\hat{y}_k - 1)(k_-(\alpha, \gamma)\hat{y}_k - 1)(k_-(\beta, \delta)\hat{y}_k - 1)} = \prod_{l=1, l \neq k}^L \frac{(qy_k - y_l)(qy_k y_l - 1)}{(y_k - qy_l)(y_k y_l - q)} \quad (135)$$

[(288), с.127, гл.3]

и  $k_{\pm}(u, v)$  са функциите (107) на параметрите, които дефинират фазовата диаграма на процеса.

В заключението (параграф19) на тази глава подчертаваме предимствата на тридиагоналния подход, а именно, че позволява единно описание на процеса с изключване както в стационарното състояние, така и на динамиката.

### Заключение

Последната глава е заключение на дисертационния труд, където са изброени основните резултати и приноси на настоящето изследване.

Дисертационният труд е посветен на изучаването на деформирани квадратични и кубични алгебрични (и супералгебрични) структури, както и на техните приложения за



точно описание на многочастични взаимодействащи системи в статистическата физика и квантовата теория на полето.

#### Научни приноси:

1. Реализация на квантова група на Лоренц във физическия базис на генератори на ротации и бустове като тензорни оператори на  $U_q(su(2))$  и пълно описание на неприводимите представяния, които в границата  $q \rightarrow 1$  възстановяват представянията на класическата група на Лоренц.

2. Реализация на деформирана  $su(2)$  супералгебра, която да съдържа деформирана  $su_q(2)$  като четна подалгебра. Това е нова деформация, различаваща се от обичайната в базис на Шевалие. (Такава деформация се оказва полезна за физически приложения, както бе използвана за дефиниция за първи път на кохерентни състояния на деформирана супералгебра.)

3. Построени са в явен вид дву- и три-точкови функции за суперполета от серията без-крайномерни представяния на  $N = 1$  конформна суперсиметрия. Намерени са в общ вид дву- и три-точковите функции за суперполета (и на спрегнатите) с произволна Лоренцова структура, и без да се налагат връзки върху параметрите на представянето. От общия вид следват частните случаи на дву-точковите и три-точковите функции за неприводимите представяния на инвариантните подпространства. (Тези функции бяха използвани в приложенията на суперконформните полени теории в теорията на суперструните и статистическата физика.)

4. В рамките на непротиворечива схема на деформирана нарастатистика на Грийн с Хопф структура са дефинирани съотношенията на деформиран Анзатц на Грийн.

5. Дефиниция на алгебра на Аски-Уилсон и на тридиагонална алгебра с два генератора чрез общ вид хомоморфизъм в квантовата афинна алгебра  $U_q(\widehat{sl(2)})$  като подалгебри коидални и със задаване в явен вид на структурните константи.

6. Построяване в явен вид чрез генераторите на алгебрата на Аски-Уилсон на операторно-значна  $K$ -матрица, която е решение на граничното уравнение на Янг-Бакстер. Този резултат е основание за суперинтегрируемост на моделите с гранична симетрия на Аски-Уилсон. (Предимни резултати, цитирани в дисертацията, са частни случаи на получената тук  $K$ -матрица в общ вид и се получават от нея за конкретни стойности на структурните константи на алгебрата на Аски-Уилсон.)

7. Дефиниция за първи път на алгебра на Аски-Уилсон и тридиагонална алгебра с  $N$  генератори, чрез хомоморфизъм в квантовата афинна алгебра  $U_q(\widehat{sl(N)})$  като подалгебри коидални, чрез обобщение на случая с два генератора. (Този резултат е много важен за приложения към неравновесни дифузионни системи с много видове частици.)

8. Построяване на редуциран усукан кирален модел върху решетка, за който е доказано, че е еквивалентен на изходния (безкраен обем) кирален модел върху решетка.

Съответствието е изведено с помощта на уравненията на Швингер-Дайсон и не зависи от константата на връзка.

9. Геометрична интерпретация на условието за квантуване на хаотична система с хиперболически Хамилтониан, чиито собствени стойности са свързани с нетривиалните пули на дзета-функцията на Риман.

10. Обобщение на матричния анзац за стационарни дифузионни процеси с поток до подход на тридиагонална алгебра. Предметът на тридиагоналната алгебра е, че представлява алгебрична схема за единно описание и точно решаване на процесите с просто изключване. Показано е, че в тридиагоналния подход се съдържат всички използвани представяния (крайномерни и безкрайномерни) на квадратната алгебра на матричния анзац.

11. В рамките на тридиагоналния алгебричен подход за първи път функциите на параметрите, дефиниращи фазовата диаграма на асиметричния процес с изключване, се определят еднозначно от свойствата на представянията на алгебрата на Аски-Уилсон на гранична симетрия. Във всички предидущи приложения тези функции са вземани наготово.

12. В рамките на тридиагоналния алгебричен подход за първи път са построени не-локални запазващи се товари за симетричния процес като следствие от тридиагоналната алгебра на гранична симетрия, която е границата  $q = 1$  на асиметричния процес. Тези товари показват, че моделът е точно решаем, не само в стационарното състояние.

13. Дефиниция на границата  $q = 0$  на алгебрата на Аски-Уилсон с два генератора, от която следва граничната алгебра на напълно асиметричния процес с просто изключване. Тя се определя чрез съотношение на модифицирано гранично уравнение на Янг-Бакстер съответстващо на параметър на деформация, различен от  $q$ , което отново е основание за точно решаване, не само в стационарното състояние.

14. В рамките на тридиагоналния алгебричен подход е изведено точно решение на спектрален проблем чрез техниката на алгебричен Бете анзац. Нов резултат представлява построяването на крайномерно представяне на тридиагоналната алгебра чрез нетривиално прекъсване на безкрайномерното представяне като са използвали пулите на полиномиите на Аски-Уилсон. Получена е диагонализация на матрицата на прехода на отворения асиметричен процес с изключване за верижка с  $L$  възли, в пълен базис от  $2^L$  собствени вектори с  $2^L - 1$  различни собствени стойности и единствено състояние със собствена стойност нула, което е стационарното състояние на процеса.

След заключението е представен списък на публикациите, върху които се основава дисертацията.

Библиографската справка включва списък от 331 заглавия.

Дисертационният труд се основава на 25 научни публикации, представени като списък от заглавия [A1-A25] и на доклади на конференции [B1-B17], публикувани в пълен текст. Списъкът [A1-A25] включва 22 статии в реферирани научни списания, една публикация

[A6] в периодичното издание *Lecture Notes in Physics* (Springer), книжка [A8] от серия Математични методи на теоретичната физика на БАН и един препринт на ЦЕРН [A22]. Книжката [A8] представява обзор върху математичните методи и резултатите на суперсиметричните теории, включително и на оригиналните резултати от статиите [A1, A2]. Тя е много използвана от студентите от по-горните курсове и докторантите на специалност теоретична и математична физика. Част от докладите, а именно [B9-B12, B14] са публикувани в списания както следва: [B9] като [A18], [B10] като [A19], [B11] като [A20], [B12] като [A25], [B14] като [A24]. Резултатите на работата [A22] са съдържание на докладите [B16] и [B17]. Докладът [B15] са лекции върху резултати от работите [A22], [A23] и [A25].

Изследванията са извършени основно в ИЯИЯЕ, БАН, както и във Физическите факултети на Университета в Мюнхен, и на Университета в Хелзинки, и в международните научни центрове ЦЕРН, Женева, ОИЯИ, Дубна и международния център по теоретична физика в Триест.

Резултатите са докладвани на семинари в ИЯИЯЕ, София, Триест, БЛТФ, Дубна, ЦЕРН, катедра по математична физика на Университета в Мюнхен, и на международни конференции между които: Лондон 2000, Зокобания 2001, Сантяго де Компостела 2005, Прага 2006, O’Raifeartaigh симпозиум 2006, Аметла де Мар 2007, Киев 2007, Дубна 2007, BW2003, BW2005, BW2007, Сент Адел 2008, Монреал 2008.

## Литература

- [1] J.Wess, From symmetry to supersymmetry, 1st lecture in the 1999 Technion Distinguished Lecture series, delivered on March 10, 1999, in The many Faces of the Superworld: Yu.Gol’fand memorial volume.
- [2] C.H.Llewellyn Smith, *Phys.Lett.* B46 (1973) 233.
- [3] S.Weinberg, *Phys.Rev.* D7 (1973) 2887.
- [4] E.Wigner, *Phys.Rev.* 51 (1936) 106.
- [5] F.Hund, *Z.Phys.* 105 (1937) 202.
- [6] S.Coleman and J.Mandula, *Phys.Rev.* 159 (1967) 1251.
- [7] L.O’Raifeartaigh, *Nucl.Phys.* B96 (1975) 331.
- [8] F.A.Berezin, The method of second quantization, (Academic Press, New York, 1966).
- [9] R.Haag, J.Lopuszansky and M.Sohnius, *Nucl.Phys.* B88 (1975) 257.
- [10] Yu.A.Gol’fand and E.S.Likhtman, *JETP Lett.* 13 (1971) 323.
- [11] D.V.Volkov and V.P.Akulov, *JETP Lett.* 16 (1972) 438.

- [12] J.West and B.Zumino, Nucl.Phys. B70 (1974) 39.
- [13] A.Salam and J.Strathdee, Nucl.Phys. B76 (1974) 477.
- [14] A.Neveu and J.H.Schwarz, Nucl.Phys. B31 (1971) 86.
- [15] P.Ramond, Phys.Rev. D3 (1971) 2415.
- [16] A.Neveu, J.H.Schwarz and C.B.Torn, Phys.lett. B35 (1971) 529.
- [17] J.-L.Gervais and B.Sakita, Nucl.Phys. B34 (1974) 39.
- [18] Letter of Heisenberg to Peierls (1930), in: W.Pauli Scientific Correspondence, vol.II, 15, Ed. Karl von Meyern, Springer-Verlag, 1985.
- [19] H.S.Snyder, Quantized space-time, Phys.Rev.71 (1947) 38.
- [20] N.Seiberg and E.Witten, JHEP 9909 (1999) 032.
- [21] M.Douglas and N.Nekrasov, Rev.Mod.Phys. 73 (2001) 977.
- [22] T.Banks, W.Fischler, S.H.Shenker, L.Susskind, Phys.Rev. D55 (1997) 5112.
- [23] A.M.Polyakov, Gauge fields and space-time, hep-th/0110196.
- [24] D.Sternheimer, Proc. Particles, Fields and Gravitation, ed.J.Rembielinski, AIP Press (1998).
- [25] M.Flato, Czech.J.Phys. B32 (1982) 472.
- [26] M.Flato, Proc. Particles, Fields and Gravitation, ed.J.Rembielinski, AIP Press (1998).
- [27] M.Flato and C. Fronsdal, J.Geom.Phys. 5 (1988) 37.
- [28] V.G.Drinfeld in Proc.ICM86 (AMS, Providence 1987).
- [29] L.D.Faddeev, Nankai Lectures Math.Phys.(World Sci. 1990).
- [30] L. Faddeev, N. Reshetikhin, L. Takhtajan. *Algebra i Analiz* **1**(1989), 178; english translation: *Leningrad Math. J.* **1**(1990), 193.
- [31] P.P.Kulish and N.Yu.Reshetikhin, *Zap.Nauchn.Sem. LOMI***101** (1981) 101; *J.Sov.Math.* **23**, 2435 (1983).
- [32] A.Comes, M.R.Douglas and A.Schwartz, JHEP 9802 (1998) 008.
- [33] T.Eguchi and R.Nakayama, Phys.Lett. B122 (1983) 59.
- [34] A.Gonzalez-Arroyo and C.P.Korthalt-Altes, Phys.Lett. B131 (1983) 396.
- [35] G.'t Hooft, Nucl.Phys. B72 (1974) 461.

- [36] T.Filk, Phys.Lett. B376 (1996) 53.
- [37] S.Minwalla, M.Van Raamsdonk and N.Seiberg, JHEP 02 (2000) 020.
- [38] A.M.Polyakov, Gauge Fields and Strings, (Harood, Chur, Switzerland 1987).
- [39] O.Aharony, S.S.Gubser, J.Maldasena, H.Ooguri and Y.Oz, Phys.Rep. 323 (2000) 183.
- [40] S.Girvin and R.Prange, The quantum Hall effect (1987).
- [41] J.Bellissard, A.van Elst and H.Schulz-Baldes, (1993) eprint cond-mat/9301005.
- [42] V. Privman (ed) *Nonequilibrium Statistical Mechanics in one dimension* 1997 (Cambridge University Press, Cambridge).
- [43] T.Liggett, Stochastic Interacting Systems (Springer, Berlin, 1999).
- [44] G.M.Schuetz *Phase Transitions and Critical Phenomena* vol.19, eds. C.Domb and J.Lebowitz (Academic Press, London, 2000).
- [45] R.A.Blythe and M.R.Evans, Nonequilibrium steady states of matrix product form: a solver's guide, J.Phys. A40 (2007) R333.
- [46] M.Chaichian and P.P.Kulish, *Multiple Facets of Quantization and Supersymmetry*, eds. M.Olshanetsky and A.Vainstein, (World Scientific, 2002).
- [47] B.Derrida, M.R.Evans, V.Hakim and V.Pasquier J.Phys. A26 (1993) 1493.
- [48] B.Derrida, Physics Reports 301 (1998) 65 and references therein.
- [49] E.K.Sklyanin, Quantum Inverse Scattering Method. Selected Topics, (1992) arXiv:hep-th/9211111.
- [50] P.P.Kulish and E.K.Sklyanin, Lect.Notes Phys. 151 (1982) 61.
- [51] E.K.Sklyanin, J.Phys. A21 (1988) 2375.
- [52] P.P.Kulish and E.K.Sklyanin, J.Phys. A24 (1991) L435.
- [53] L.Mezincescu and R.J.Nepomechie, Int.J.Mod.Phys. A13 (1998) 2747.
- [54] G.W.Delius and N.J.MacKay, Comm.Math.Phys. 233 (2003) 173.
- [55] A.Doikou, J.Stat.Mech. (2005) P12005.
- [56] A.Nichols, V.Rittenberg and J.de Gier, J.Stat.Mech. (2005) P003.
- [57] P.Baseilhac and K.Koizumi, Nucl.Phys. B720 (2005) 325.
- [58] P.B.Wiegmann and A.V.Zabrodin, Nucl.Phys. B451 (1995) 699.
- [59] P.Baseilhac and K.Koizumi, J.Stat.Mech. (2007) P09006.

- [60] Y.Ohnuki, S.Kamefuchi, Quantum Field Theory and Parastatistics, (Springer, Berlin, 1982).
- [61] A.Comnes and M.Dubois-Violette, Yang-Mills Algebra, *Lett.Math.Phys.* 61, (2002) 149.
- [62] N.Nekrasov, hep-th/0203109.
- [63] G.Arutyunov, S.Frolov and M.Staudacher, *JHEP* 05 (2005) 054.
- [64] N.Beisert and M.Staudacher, *Nucl.Phys.* B727 (2005) 1.
- [65] Yu.F.Smirnov, V.N.Tolstoy and Yu.I.Kharitonov, *Sov.J.Nucl.Phys.*53 (1991) 593.
- [66] L.C.Biedenharn, *J.Phys.* A22, (1989), L873.
- [67] A.J.Macfarlane, *J.Phys.* A22, (1989), 4581.
- [68] P.P.Kulish and N.Y.Reshetikhin, *Lett.Math.Phys.* 18 (1989) 143.
- [69] H.S.Green, *Phys.Rev.* 90 (1953) 270.
- [70] A.S.Zhedanov, *Theor.Math.Phys.* 89 (1990) 190.
- [71] P.Terwilliger, *Lec.Notes in Math.* 1883, (2006) 225; math.QA/0307016.
- [72] N.Y.Reshetikhin, Semenov-Tian-Shanski, *Lett.Math.Phys.*19 (1990), 133.
- [73] V.Chari, A.Pressley, *CMS Conf. Proc.***16**, (Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995) 59.
- [74] T.Koornwinder, *SIGMA* 3 (2007) 063.
- [75] T.Eguchi and H.Kawai, *Phys.Rev.Lett.* 48 (1982) 1063.
- [76] H.Aoki, N.Ishibashi, S.Iso, H.Kawai, Y.Kitazawa and T.Tada, *Nucl.Phys.*B565 (2000) 176.
- [77] Y.Makeenko, *Sov.Phys.JETP Lett.*72 (2000) 393.
- [78] M. Berry, Riemann's zeta function: a model of quantum chaos, *Lecture Notes in Physics* **263** (Springer, Heidelberg, 1986).
- [79] M. Berry and J. Keating,  $H = xp$  and the Riemann zeros, (1998).
- [80] L.Dolan, M.Grady, *Phys.Rev.*D3, (1982) 1587.
- [81] M.Chaichian, P.P.Kulish, *Phys.Lett.* B234 (1990) 72.
- [82] R.A.Blythe, M.R.Evans, F.Colaioni and F.H.L.Essler, *J.Phys.* A33 (2000) 2313.
- [83] T.Sasamoto, *J.Phys.* A32 (1999) 7109.
- [84] M.Uchliama, T.Sasamoto, M.Wadati, *J.Phys.* A37 (2004) 4985.
- [85] R.A.Askey, J.A.Wilson, *Mem. Amer.Math Soc.*, 54 (319) (1985).

### Списък на публикациите, на които се основава дисертацията

#### A. Научни публикации

- A1. B.Aneva, S.Mikhov, D.Stoyanov, On some representations of the conformal superalgebra, Theor.Math.Phys., v.27 (1976), 307 (p.502 engl.version) and JINR Preprint E2-9098 (1975).
- A2. B.Aneva, S.Mikhov, D.Stoyanov, On some properties of the conformal superalgebra representations, Theor.Math.Phys., v.31, (1977), 177 (p.394 engl.version) and JINR Preprint E2-9885 (1976).
- A3. B.Aneva, S.Mikhov, D.Stoyanov, On the two- and three-point functions for conformal superfields, Theor.Math.Phys., v.35, (1978), 162 (p.383 engl.version) and JINR Preprint E2-10619 (1977).
- A4. B.Aneva, D.Stoyanov, A supersymmetric form of the Thirring model, J.Phys.G: Nucl.Part. Phys. 5, (1979) 463.
- A5. B.Aneva, S.Mikhov, D.Stoyanov, On the nonunique definition of the current in the Thirring model, J.Phys. A, v.14, N 1 (1981) 493.
- A6. B.Aneva, D.Stoyanov, Nonrelativistic Supersymmetry, in Lecture Notes in Physics 313, Springer, Berlin, 1988, 91.
- A7. B.Aneva, Nonrelativistic supersymmetry and gauge invariance, J.Phys.A 22 (1989), 129.
- A8. Б.Анева, Суперсиметрия, серия математични методи на теоретичната физика, кн.7, (Издателство БАН, София 1990).
- A9. B.Aneva, Y.Brihaye, P.Rossi, Pseudo-abelian operators in the large N limit, Phys.Lett. 133B, (1983), 215 and CERN Preprint TH 3665 (1983).
- A10. B.Aneva, Y.Brihaye, P.Rossi, Schwinger - Dyson Equations in reduced twisted chiral model, Phys.Lett.134B, (1984), 245 and CERN Preprint TH 3716 (1983).
- A11. B.Aneva, Y.Brihaye, P.Rossi, Reduced finite N continuum chiral model, Phys.Lett.138B, (1984), 181 and CERN Preprint TH 3751 (1983).
- A12. B.Aneva, A deformed quantum SU(2) superalgebra, J.Phys. A: Math. Gen. 24 (1991), L455.
- A13. B.Aneva, A realization of the quantum Lorentz group, Phys.Lett. B340 (1994), 155.
- A14. B.Aneva, Symmetry of the Riemann operator, Phys.Lett.B450 (1999), 388 and CERN preprint CERN-TH/98-247.
- A15. B.Aneva, The Non-commutative space of stochastic diffusion systems, J.Phys.A 35 (2002), 859.
- A16. B.Aneva, Deformed coherent and squeezed states of multiparticle processes, EPJC 31 (2003), 403.

- A17. B.Aneva and T.Popov, Hopf structure and Green ansatz of deformed parastatistics algebras, math-ph/0412016, J.Phys.A 38 (2005), 6473.
- A18. B.Aneva, Exact solvability of open stochastic systems, Czech.J.Phys.v.56 (2006), 1075.
- A19. B.Aneva, Hidden symmetries of stochastic models, SIGMA 3 (2007) 068.
- A20. B.Aneva, Boundary Algebra and Exact Solvability of the Asymmetric Exclusion Process, JNMP, v.15, supp.3 (2008) 22, (направено катр Tridiagonal structure of the asymmetric exclusion process, CERN-PH-TH/2007 - 028).
- A21. B.Aneva, Matrix product ansatz as a tridiagonal algebra, J. Phys. A40, (2007) 11677 (CERN-PH- TH/2007 - 046).
- A22. B.Aneva, Boundary Askey-Wilson symmetry and related spectral problem exact solution, (CERN-PH-TH/2007 - 222).
- A23. B.Aneva, M.Chaichian and P.P.Kulish, From quantum affine symmetry to boundary Askey-Wilson algebra and reflection equation, J.Phys. A41, (2008) 135201.
- A24. B.Aneva, Exact solvability of a model of a nonequilibrium physics, FdPh, v.56, No.4-5 (2008) 330.
- A25. B.Aneva, Triadiagonal Symmetries of Models of Nonequilibrium Physics, SIGMA 4 (2008) 056.
- В. Доклади на конференции
- B1. B.Aneva, Supersymmetry and the superdeformed nuclei, Int.Conf.Nucl.Data for Sci.and Techn., Trieste 1997, Conf.Proc. v.59, p.773, SIF, Bologna 1997 and Preprint INRNE 77/96 (1996).
- B2. B.Aneva, Symmetry in phase space of a chaotic system, presented at 'Complex and disordered systems', King's College and ICMP 2000, Imperial College, July 2000, AIP Conf.Proc., v.553, p.173, New York 2001.
- B3. B.Aneva, The quantum space of stochastic processes, Proc. Modern Math. Physics Conf., Sokobanja, August 2001, eds. B.Dragovich and B.Sazdovic, p.297, Belgrade 2002.
- B4. B.Aneva, Symmetries of a hyperbolic dynamical system, Proc. VI Int. Wigner Symposium, p.321, Istanbul 2002.
- B5. B.Aneva, Deformed coherent state solution to multiparticle stochastic processes, Balkan Workshop, V.Banja, 2003 Proc. BW2003 Workshop, p.131, World Sci.2005.
- B6. B.Aneva, Cubic Algebras and Generalized Statistics, Proc.BW2005 Workshop, V.Banja, 2005; FACTA UNIVERSITATIS SERIES PHYSICS, CHEMISTRY AND TECHNOLOGY, Vol. 4, No 2, 2006, on-line.



- B7. B.Aneva, Quantum groups and stochastic models, Proc. 7th Varna Conference on Quantization, Geometry, Integrability, Varna 2005, p.57, SOFTTEX, Sofia 2005.
- B8. B.Aneva, Symmetries of Integrability of Stochastic Models, Proc. Workshop NWIP, p.57, Bergen, 2005.
- B9. B.Aneva, Exact solvability of open stochastic systems, Proc. Int. Coll. Integrable systems and quantum symmetries (ISQS-15), Prague 2006.
- B10. B.Aneva, Hidden symmetries of stochastic models, Proc. O'RaiFeartaigh Symposium on Nonperturbative and Symmetries Methods in Quantum Field Theory, Budapest, 2006.
- B11. B.Aneva, Boundary Algebra and Exact Solvability of the Asymmetric Exclusion Process, talk, conference NEEDS2007, Ametla de Mar, 2007, Proc. NEEDS2007.
- B12. B.Aneva, Quantum Symmetries and Exactly Solvable Models of Nonequilibrium Physics, Talk, Kiev Conf. Symmetry in Nonlinear Math Physics, Kiev 2007, Proc.Kiev, 2007.
- B13. B.Aneva, Models of Nonequilibrium Physics and Askey-Wilson Algebra, Talk Supersymmetry and Quantum Symmetries 07, Dubna, Proc.SQS2007, Eds. E.Ivanov and S.Fedoruk, p.379, Dubna:JINR 2008, ISBN 5-9530-0184-3.
- B14. B.Aneva, Tridiagonal Algebra and Exact Solvability, Talk Balkan Workshop, BW2007, Kladovo, 2007, Proc.BW2007.
- B15. B.Aneva, Many-body systems with a flow, 2 lectures, School and Workshop on Hamiltonian systems and QFT, Calimanesti, May 2008, to appear in the Proceedings.
- B16. B.Aneva, Askey-Wilson algebra and related spectral problem, talk Conference SIDES, Ste.Adele, June 2008, to appear in the Proceedings.
- B17. B.Aneva, Lattice systems with a flow, talk Workshop Integrable quantum systems and solvable statistical mechanical models, Montreal, July 2008, to appear in the Proceedings.